«Сәрсен Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті» КЕ АҚ

ӘОЖ: 517.9:519.17(43) **Қолжазба құқығында**

МУСТАФИНА МЕРГУЛЬ ОРАЛБЕКОВНА

Граф-ағаштардағы дифференциалдық теңдеулер үшін шекаралық шарттарды идентификациялау

8D05401-Математика
философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
физика-математика ғылымдарының
докторы, профессор Кангужин Б.Е.

Шетелдік ғылыми кеңесші
физика-математика ғылымдарының
докторы, профессор Ишкин Х.К.
Уфа қ, Ресей Федерациясы

Қазақстан Республикасы
Өскемен, 2026

МАЗМҰНЫ

ҚЫСҚАРТУЛАР МЕН БЕЛГІЛЕУЛЕР 4
НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР 5
КІРІСПЕ 6
1 ГРАФ-ЖҰЛДЫЗЫНДАҒЫ ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ СПЕКТРЛІК ТАЛДАУЫНЫҢ ТУРА ЕСЕПТЕРІ 12
1.1 Граф-жұлдызындағы Штурм-Лиувилль операторы 12
1.2 Граф-жұлдызындағы біртекті Штурм – Лиувилль теңдеуінің негізгі шешімдер 15
1.3 Λ операторының меншікті мәндерінің қарапайымдылығы 16
1.4 Әртүрлі шекаралық шарттардағы сипаттамалық анықтауыштар арасындағы байланыс 17
1.5 Операторды меншікті мәндерінің асимптотикалық формулалары 23
1.6 Λ операторының меншікті функцияларының асимптотикалық формулалары.....29
1.7 Спектрлік параметр бойынша экспоненциалдық қатарлар.....30
2 ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ ГРАФ-ЖҰЛДЫЗЫНДАҒЫ СПЕКТРЛІК ТАЛДАУЫНЫҢ ІШІНАРА КЕРІ ЕСЕПТЕРІ.....37
2.1 Спектрлік талдаудың ішінара кері есебі ретінде оператордың шекаралық шарттарын идентификациялау 37
2.2 Қаттылық коэффициентін анықтау.....38
2.3 Бейлокал үйлесімділік шарттарын айқындау 42
2.4 Шекаралық шарттарды идентификациялау есептері 45
3 ГРАФ-АҒАШЫНДАҒЫ ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОР ҮШІН СПЕКТРЛІК АНАЛИЗДІҢ ТУРА ЕСЕПТЕРІ.....47
3.1 Граф- ағашымен байланысты негізгі анықтамалар мен ұғымдар …..….....47
3.2 Граф- ағаштағы Штурм–Лиувилль типті оператор 47
3.3 Граф-жұлдызында анықталған біртекті Штурм–Лиувилль теңдеуінің негізгі шешімдері.....52
3.4 Әр түрлі үйлесімділік шарттарындағы сипаттамалық анықтауыштар арасындағы байланыс 55
3.5 Кванттық графтардың сипаттамалық функциялары…….....59
4. ГРАФТАРДАҒЫ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЬ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫН ИДЕНТИФИКАЦИЯЛАУДАҒЫ ЭТАЛОНДЫҚ ЕСЕПТЕР ӘДІСІ
4.1 Графтағы Штурм–Лиувилль теңдеуі үшін Коши есебінің қойылымы.....68
4.2 Графтағы Штурм–Лиувилль теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі.....70
7

4.3 Берілген шекаралық формалар жүйесі үшін биортогональді шешімдер жүйесін құру 74
4.4 Берілген шекаралық формалар жүйесі үшін эквивалентті интегралдық түрдегі формалар жиынтығын құру.....75
4.5 Канондық есептерді таңдау және кері есептің қойылуы.....79
4.6 Шекаралық формаларды қалпына келтірудің бірмәнділік туралы теоремасы.....80
4.7 Шекаралық есептер жағдайындағы бірмәнділік теоремасын нақтылау.....83
5 ЛАПЛАС-БЕЛТРАМИ ОПЕРАТОРЫ ҮШІН ОЙЫЛҒАН ШЕҢБЕРЛЕР МЕН СЕГМЕНТТЕРДЕН ТҰРАТЫН СТРАТИФИКАЦИЯЛАНҒАН ЖИЫНТЫҚТАҒЫ ДҰРЫС ҚОЙЫЛҒАН ЕСЕПТЕР 87
5.1 Ω стратификацияланған жиын және Ω-дағы функциялар класстары.....87
5.2 C_1ойылған шеңберіндегі Лаплас-Белтрами операторы үшін дұрыс шешілетін есептер 88
5.3 Ω стратификацияланған жиындағы Лаплас-Белтрами операторы үшін қисынды шешілген есептер 89
5.4 Стратификацияланған жиынтықтағы қисынды шешілетін есептердің мысалдары.....93
5.5 Өз - өзіне түйіндес қисынды шешілетін есептер 96
ҚОРЫТЫНДЫ.....100
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ 101

ҚЫСҚАРТУЛАР МЕН БЕЛГІЛЕУЛЕР

$\Gamma = \{V, E\}.$	- граф- жұлдыз
Λ	- оператор
$\{\lambda_n^0\}$	- сипаттамалық анықтауыштың нөлдері
e_j	- графтың қабырғасы
r	- ағаш доғаларының жалпы саны
d_i	- графтың төбесінің дәрежесі
i	- ағаш төбесі
$q_j(x_j)$	-нақты потенциал
$\sigma(L_i)$	-L_i операторының спектрі
$L_p(\Gamma)$	-графтың бойындағы функционалдық кеңістік
$\{c(x,\lambda), s(x,\lambda)\}$	біртекті теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Осы диссертациялық жұмыста төмендегі стандарттарға сәйкес сілтемелер пайдаланылды:

ГОСТ 7.32-2001. Ғылыми зерттеу жұмысының есебі. Безендіру ережелері мен құрылымы.

ГОСТ 7.1-2003. Библиографиялық таспа. Библиографиялық сипаттау.

ГОСТ 7.1–84.

Ақпарат, кітапхана және баспа ісі бойынша стандарттар жүйесі. Құжаттың библиографиялық сипаттамасы. Жалпы талаптар мен құрастыру ережелері.

ГОСТ 7.9–95 (ISO 214–76).

Ақпарат, кітапхана және баспа ісі бойынша стандарттар жүйесі. Реферат пен аннотация. Жалпы талаптар.

ГОСТ 7.12–93.

Ақпарат, кітапхана және баспа ісі бойынша стандарттар жүйесі. Библиографиялық жазба. Орыс тіліндегі сөздерді қысқарту. Жалпы талаптар мен ережелер.

КІРІСПЕ

Зерттеу жұмысының жалпы сипаттамасы: Диссертациялық жұмыста графтардағы Штурм–Лиувилль операторларының шекаралық коэффициенттерін және үйлесімділік шарттарына кіретін коэффициенттерді тектес операторлардың кейбір шектеулі меншікті мәндер жиынтығы бойынша бірмәнді қалпына келтіру мәселелері зерттеледі.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі: Метрикалық графтардағы дифференциалдық операторлар дегеніміз - нанофизикада, толқындардың таралуында, химияда және басқа да жаратылыстану ғылымдарында қолданылатын математикалық физиканың бір саласы болып табылады. Осы тұрғыда пайда болатын модельдер [1] геометриялық құрылымды сақтай отырып, операторлардың спектрлік және шашырау сипаттамаларын аналитикалық түрде есептеуге мүмкіндік береді, сондықтан мұндай модельдер спектралдық құбылыстарды теориялық тұрғыдан зерттеудің маңызды құралы болып табылады. Ал [2] жұмыста графтардағы дифференциалдық операторлар ішектер мен стерженнен, электр тізбектерінен, гидро және жылу желілерінен тұратын механикалық модельдерді талдау үшін қолданылады.

Бұл диссертациялық жұмыста кванттық граф үшін ішінара кері спектрлік есептерді қарастырамыз. Кері спектрлік талдау есептерінің негізгі мақсаты — операторды оның спектрлік сипаттамалары бойынша қалпына келтіру болып табылады. Кейбір дифференциалдық операторлардың коэффициенттерімен сипатталатын ортаның қасиеттерін бақыланатын деректер, мысалы спектрлік мәліметтер арқылы анықтау қажет болған жағдайда осы реттегі есептер әртүрлі қолданбаларда жиі кездеседі. Интервалдарда анықталған дифференциалдық операторлар үшін кері есептер теориясының негізгі нәтижелерін [3, 4, 5, 6] монографияларыннан табуға болады. Ал [7] еңбекте графтардағы дифференциалдық операторлар үшін кері спектрлік есептерге жеткілікті түрде толық шолу берілген. Сонымен қатар, В.А. Юрконың [8] зерттеу жұмысында кез келген топологиялық граф үшін Штурм–Лиувилль потенциалдарын қалпына келтіруге арналған конструктивті алгоритм әзірленген.

Зерттелу деңгейі

Енді қарапайым дифференциалдық операторлар үшін ішінара кері спектрлік есептерге қатысты нәтижелерге шолу жасауға көшейік. Мұндай есептер дифференциалдық өрнектің коэффициенттерін анықтау аймағының белгілі бір бөлігінде (шекті интервалда немесе геометриялық графта) спектрлік сипаттамалар бойынша қалпына келтіруге бағытталса, ал қалған бөліктегі коэффициенттер алдын ала белгілі болады. Әдетте ішінара кері есептер толық кері есептерге қарағанда кемірек спектрлік деректерді қажет етеді. Ішінара кері есептер кейде жартылай кері есептер, Хохштадт–Либерман типіндегі есептер, аралас деректермен кері есептер немесе толық емес кері есептер деп те аталады. 1978 жылы Хохштадт пен Либерман интервалдың бір бөлігіндегі потенциалдың белгілі болуын операторды қалпына келтіру үшін қажетті спектрлік деректер көлемін азайтатынын дәлелдеген. Хохштадт–Либерманның есебі ішінара кері есептердің алғашқысы болып саналады [9].

Кейіннен бұл есептің әртүрлі жалпылаулары О. Хальд [10], Ф. Гестези мен Б. Симон [11], М. Хорват [12, 13] және басқа да зерттеушілердің еңбектерінде қарастырылады. Ал Хохштадт–Либерман есебінің шешілу шарттары мен конструктивті әдістері Л. Сахнович [14], Р.О. Гринив пен Ю.В. Мыкитюк [15], С.А. Бутерин [16, 17], сонымен қатар О. Мартинюк пен В.Н. Пивоварчик [18, 19] еңбектерінендe алынған.

Геометриялық графтардағы дифференциалдық операторлар, яғни кванттық графтар үшін де көптеген ішінара кері есептер туындайды. Мұндай операторлар органикалық химиядағы, мезоскопиялық физикадағы, нанотехнологиядағы, гидродинамикадағы, толқын өткізгіштер теориясындағы және басқа да қолданбалардағы граф тәрізді құрылымдар мен желілердегі әртүрлі процестерді модельдеу үшін қолданылады [2, 20]. Кванттық графтарға кіріспені П. Кучметтің [21] еңбегінен табуға болады. Графтардағы дифференциалдық операторлар үшін кері спектрлік есептерге арналған көлемді әдебиет те бар [7]. Біз, мұнда ішінара кері есептерге назар аударамыз. Мұндай есептер графтың белгілі бір бөлігінде дифференциалдық операторлардың коэффициенттері (мысалы, Штурм–Лиувилль потенциалдары) алдын ала белгілі болған жағдайда туындайды. Бұл коэффициенттер өлшеулер арқылы немесе қайта құру әдісімен алынуы мүмкін. Екінші жағдайда ішінара кері есептердің шешімдері графтардағы толық кері есептерді шешудің қосымша қадамы ретінде қолданылады.

Графтардағы ішінара кері есептер бойынша алғашқы нәтижелер В.Н. Пивоварчик [22], В.А. Юрко [23] және С. Янг және тағы да басқа авторлардың еңбектерінде алынған [24–26]. Алайда аталмыш жұмыстардың нәтижелері қарапайым құрылымды графтардағы (жұлдызша графтар мен ілмегі бар қарапайым графтар) Штурм–Лиувилль (Шрёдингер) операторлары үшін жалғыздық теоремаларымен шектеледі. Кейін Н.П. Бондаренко әртүрлі типтегі графтардағы ішінара кері есептерді шешудің конструктивті әдісін әзірледі. Осы әдістің көмегімен граф-жұлдыздағы [27–30], циклдері бар қарапайым графтардағы [31,32], ағаш тәрізді графтардағы (циклсіз графтар) [33], тіпті кез келген геометриялық құрылымды графтардағы дифференциалдық операторлар мен түйіндер үшін жаңа нәтижелер алынған [34,35]. Бұл нәтижелер тек жалғыздық теоремаларын ғана емес, сонымен қатар жартылай кері есептердің шешімділігі мен орнықтылығын қамтамасыз ететін конструктивті шешу алгоритмдерін де қамтыды.

Осылайша, диссертациялық жұмыс графтардағы Штурм–Лиувилль операторларының шекаралық коэффициенттерін және үйлесімділік шарттарына кіретін коэффициенттерді тектес операторлардың кейбір ақырлы меншікті мәндер жиынтығы бойынша идентификациялау әдістерін терең зерттеуге бағытталған. Ұсынылып отырған идентификациялау әдістері ғылым мен техниканың түрлі салалары үшін маңызды теориялық және практикалық мәнге ие. Алғашқы кезеңде бұл әдістер ағаш типті және жұлдыз типті графтардағы дифференциалдық операторларға бейімделді.

Зерттеудің мақсаты мен міндеттері

Жұмыстың негізгі мақсаты граф - ағаштарындағы Штурм–Лиувилль операторларының анықталу облыстарын бірмәнді қалпына келтіру мәселелерін зерттеу.

Осы мақсатқа жету үшін келесі міндеттер қойылды:

– граф-жұлдыз бен граф-ағаштағы екінші ретті дифференциалдық операторлардың негізгі шешімдері мен сипаттамалық анықтауыштарын талдау негізінде тікелей спектрлік есептерді зерттеу;

– граф-жұлдыздағы Штурм–Лиувилль операторларының меншікті мәндерінің асимптотикалық формулаларын табу;

– граф – жұлдыз бен граф-ағаштағы екінші ретті дифференциалдық операторлар үшін анықталу облыстарын идентификациялау есептерін ішінара кері спектрлік есептер ретінде зерттеу;

– тектес операторлардың ақырлы меншікті мәндер жиынтығы бойынша шекаралық коэффициенттер мен үйлесімділік шарттарына кіретін коэффициенттерді бірмәнді қалпына келтіру мүмкіндігін негіздеу.

Зерттеу нысаны: Геометриялық графтардағы сызықтық дифференциалдық операторлар.

Зерттеу пәні: Тектес операторлардағы меншікті мәндердің ақырлы жиынтығы бойынша шекаралық коэффициенттерді және үйлесімділік шарттарына кіретін коэффициенттерді бірмәнді қалпына келтіру.

Зерттеу әдістемесі: Диссертациялық жұмыста дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясының, функционалдық анализдің, сондай-ақ кешенді айнымалы функциялар теориясының сыналған әдістері қолданылды. Атап айтқанда, бірінші бөлімде бүтін функцияның жуық нөлдерін табу үшін Хорн әдісі пайдаланылды, ал екінші бөлімде шегерімдер туралы теоремалар мен мероморфты функциялардың қасиеттері қолданылды. Жекелеген тарауларда Вайнштейн анықтауыштары пайдаланылып, бұл бүтін функциялардың нөлдерінің кезектесу қасиеттерін тереңірек анықтауға мүмкіндік берді.

Нәтижесінде тектес операторлардың меншікті мәндерінің ақырлы саны арқылы ізделінетін коэффициенттерді бірмәнді қалпына келтіруге болатыны дәлелденді. Ал бір ғана бастапқы оператордың меншікті мәндерінің ақырлы жиынтығы арқылы мұндай қалпына келтіру мүмкін еместігі көрсетілді.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы: Бірінші бөлімде алынған меншікті мәндердің асимптотикалық формулалары граф доғаларының ұзындықтары әртүрлі болған жағдай үшін жаңа нәтиже болып табылады. Бұған дейін мұндай асимптотикалар тек нөлдік потенциалдар және бірдей ұзындықтағы доғалар жағдайында ғана қарастырылған. Бұл диссертацияда потенциалдар дифференциалданатын функциялар түрінде қарастырып, доғалардың ұзындықтары әртүрлі мәндер қабылдайды деп есептейміз.

Жұмыстың екінші жаңалығы – ізделінді коэффициенттерді бірмәнді қалпына келтіру үшін тектес операторлардың меншікті мәндерінің тек ақырлы санының жеткілікті болатыны және тектес операторларды таңдау процедурасының ұсынылуы.

Зерттеу жұмысының теориялық және практикалық маңызы: Диссертациялық жұмыс қолданылған әдістері мен алынған нәтижелері бойынша теориялық сипатқа ие. Бұл жұмыста дифференциалдық теңдеулер теориясындағы Лагранж формуласы, бүтін және мероморфты функциялар теориясының аналитикалық әдістері, сондай-ақ сызықтық операторлардың спектрлік теориясының нәтижелері кеңінен қолданылды. Жұмыстың теориялық сипатына қарамастан, алынған нәтижелер қолданбалы есептерге де тікелей қатысты. Дербес жағдайда, мембрананың тербелістерін есептеу кезінде көбіне мембрананы бірөлшемді желілермен алмастырады, ал бұл желілер графтар ретінде қарастырылады. Осылайша, екіөлшемді есепті жуықтап есептеулерде бірөлшемді графтық модельдермен алмастыру арқылы есептің өлшемін төмендетуге мүмкіндік туады.

Осылайша, жұмыстың теориялық нәтижелері нақты қолданбалы есептерді шешудің әдіснамалық негізі бола алады.

Қорғауға ұсынылған негізгі ғылыми тұжырымдамалар:

– граф-жұлдыз бен граф-ағаштағы екінші ретті дифференциалдық операторлардың тура спектрлік есептері олардың негізгі шешімдерін, сипаттамалық анықтауыштарын жан-жақты талдау негізінде зерттелді;

– Штурм–Лиувилль операторларының граф-жұлдыздағы меншікті мәндерінің асимптотикалық формулалары табылды;

– анықталу облыстарын идентификациялау есептері граф-жұлдыз және граф-ағаштағы екінші ретті дифференциалдық операторын спектрлік талдаудың ішінара кері спектрлік есептері ретінде зерттелді;

– тектес операторлардың ақырлы меншікті мәндер жиынтығы бойынша шекаралық коэффициенттер мен үйлесімділік шарттарына кіретін коэффициенттерді бірмәнді қалпына келтіру мүмкіндігі негізделіп зерттелді.

Зерттеу жұмысының басқа ғылыми-зерттеу жобаларымен байланысы.

Жұмыстың Қазақстан Республикасы Ғылым комитеті мен Ғылым және жоғары білім министрлігінің ғылыми-зерттеу жобаларын орындаумен байланысы бар. Автор бұл жобаларға кіші ғылыми қызметкер ретінде қатысқан:

- № ИРН AP19678089 «Графтардағы дифференциалдық операторлар үшін кері спектрлік есеп» (2023–2025 жж.)

Автордың жеке үлесі. Диссертациялық жұмыста алынған барлық ғылыми нәтижелер автордың ғылыми кеңесшілерімен бірлесіп, тікелей қатысуымен алынды. Автор зерттеу әдістерін әзірлеуге, есептердің шешімін табуға және алынған нәтижелерді талдауға белсенді түрде атсалысты.

Ғылыми жетекшілер есептің дұрыс қойылуына, зерттеудің негізгі бағыттарын айқындауға және алынған нәтижелерді талқылауға өз үлестерін қосты.

Зерттеу жұмысының сынақтан өтуі мен талқылануы. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері халықаралық ғылыми конференцияларда, оның ішінде шетелдік конференцияларда, сондай-ақ ғылыми семинарларда баяндамалар жасалды:

Диссертация тақырыбы бойынша 6 жұмыс, оның ішінде 3 жұмыс Web of Science және Scopus деректер қорлары бойынша импакт – факторы бар шетелдік журналдарда, 1 жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім беру саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған журналда, 2 жұмыс халықаралық ғылыми конференциялар материалдарының жинақтарында жарияланды.

Жарияланымдар:

1. Kanguzhin B.E., Kaiyrbek Zh.A., Mustafina M.O. Recovering of the Stiffness Coefficients of the Sturm–Liouville Operator on a Star Graph from a Finite Set of Its Eigenvalues// Lobachevskii Journal of Mathematics. -2024.-V.45, №6. –P. 2711-2716. https://doi.org/10.1134/S1995080224602881 (WoS Q2. Scopus Процентиль 57). 02.10.2024.

2. Kanguzhin B.E., Kaiyrbek Zh.A., Mustafina M.O. Determination of Stiffness Coefficients at the Internal Vertices of the Tree Based on a Finite Set of Eigenvalues of an Asymmetric Second-Order Linear Differential Operator// Symmetry. -2025.-V.17, 1263 https://doi.org/10.3390/sym17081263 (WoS Q2. Scopus Процентиль 93). 07.08.2025.

3. Kanguzhin B.E., Mustafina M.O., Kaiyrbek O.A. Well-posed problems for the Laplace-Beltrami operator on a stratified set consisting of punctured circles and segments // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. -2025.-V.119, №3. -P 150-163 https://doi.org/10.31489/2025M3/150-163 (WoS Q2. Scopus Процентиль 53). 30.09.2025.

4. G-H. Aimal Rasa, M. Madiyarov, M. Mustafina. On the unique solvability of nonlocal in time problemscontaining the ionkin operator in the spatial variable // KazNU Bulletin. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. -2025.-V. 128, №4 35-57. https://doi.org/10.26577/JMMCS202512844. 30.12.2025.

«Уфалық күзгі математикалық мектеп – 2023» халықаралық ғылыми конференциясында (Ресей Федерациясының «Уфа ғылым және технологиялар университеті» федералдық мемлекеттік бюджеттік жоғары оқу орны, Уфа қ., 2023 ж.);

Сәрсен Аманжоловтың 120 жылдығына арналған «Білім мен ғылымды трансформациялау – адами капитал сапасын арттырудың негізгі факторы» «Аманжолов оқулары-2023» Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясы (С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен қ., 2023 ж.).

Зәки Ахметовтің туғанына 95 жыл толуына орай «Зәки Ахметовтің ғылыми мұрасы және ұлттық құндылықтар» атты Республикалық ғылыми-тәжірибелік конференциясы 2023 (С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен қ., 2023 ж.).

«Уфалық күзгі математикалық мектеп – 2024» халықаралық ғылыми конференциясында (Ресей Федерациясының «Уфа ғылым және технологиялар университеті» федералдық мемлекеттік бюджеттік жоғары оқу орны, Уфа қ., 2024 ж.).

«Жаратылыстану ғылымдарындағы кері есептер» атты халықаралық ғылыми конференция (С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен қ., 2024 ж.).

Қаныш Сәтбаевтың 125 жылдығына арналған «Білім-ғылым-бизнес интеграциясы: өзекті мәселелері мен болашағы» тақырыбында студенттер, магистранттар, докторанттар және жас ғалымдардың Х Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясы (С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен қ., 2024 ж.).

«Ғылым, қоғам және жасанды интеллект: өзара ықпалдастықтың өзекті мәселелері» «Аманжолов оқулары-2025» Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясы (С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен қ., 2025 ж.).

«Уфалық күзгі математикалық мектеп – 2025» халықаралық ғылыми конференциясында (Ресей Федерациясының «Уфа ғылым және технологиялар университеті» федералдық мемлекеттік бюджеттік жоғары оқу орны, Уфа қ., 2025 ж.).

Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс жалпы кіріспеден, бес тараудан, қорытындыдан және қолданылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыстың жалпы көлемі 109 беттен тұрады. Қолданылған әдебиеттер саны – 136.

Кіріспеде зерттеу тақырыбының өзектілігі негізделіп, мақсаттары, міндеттері, ғылыми жаңалығы мен құрылымы баяндалады.

Қорытындыда жұмыстың негізгі нәтижелері жинақталып, олардың ғылыми және практикалық маңызы баяндалады. Сонымен қатар, болашақта жалғастыруға болатын бағыттар ұсынылады.

Алғыс. Автор отандық ғылым кеңесшісі – әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университетінің механика – математика факультетінің «Математика» кафедрасының профессоры, физика - математика ғылымдарының докторы Кангужин Балтабек Есматұлына және шетелдік ғылыми кеңесшісі – Уфа ғылым және технологиялар университетінің профессоры, физика - математика ғылымдарының докторы Ишкин Хабир Кабировичке диссертациялық жұмысты орындау кезіндегі алтын уақыттарын бөліп, дұрыс бағыт бағдар бергені, құнды да пайдалы кеңестері мен жан жақты қолдаулары үшін шынайы алғысын білдіреді.

Автор Қазақстан Республикасының Үкіметіне, әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті мен С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университетіне көрсеткен қолдаулары үшін және шетелдік ғылыми кеңесшімен жұмыс жасауға мүмкіндік бергені үшін алғысын білдіреді.

1 ГРАФ-ЖҰЛДЫЗДАҒЫ ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ СПЕКТРЛІК ТАЛДАУЫНЫҢ ТУРА ЕСЕПТЕРІ

Диссертацияның бұл бөлімінде граф-жұлдыздағы Штурм-Лиувилль операторының спектрлік талдаудағы тура есептеріне қатысты кейбір сұрақтар зерттеледі.

1.1 Граф-жұлдыздағы Штурм-Лиувилль операторы

$\Gamma = \{V, E\}$ граф-жұлдызы берілсін. Граф төбелерін 1-ден $m+1$ ге дейін нөмірлейік және мұндағы $(m+1)$- ішкі төбе нөмірі. $e_1, \dots, e_m$ қабырғалары ұзындықтары $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ болатын бағыттаған кесінділерді сипаттайды. Γ граф-жұлдызында Штурм-Лиувилль операторын келесі формула (1.1) арқылы

$$l_j(y_j) = -y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j), \quad x_j \in e_j = (0, b_j), \quad j = 1, \dots, m, \qquad (1.1.1)$$

анықтайық және тегіс функцияларда (1.2) ол келесі шекаралық шарттарды

$$y_j'(b_j) - h_j y_j(b_j) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \qquad (1.1.2)$$

сондай-ақ ішкі төбеде үйлесімділік шарттарды

$$y_1(0) = y_2(0) = \cdots = y_m(0), \qquad (1.1.3)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left(y_j'(0) - k_j y_j(0)\right) = 0. \qquad (1.1.4)$$

қанағаттандыратын болсын.

Ары қарай $j = 1, \dots, m$ болған кезде нақты потенциалдар $q_j(x_j) \in L_2(0, b_j)$, h_j және k_j шамалар нақты сандар болсын деп ұйғарайық.

$(l_1(\cdot), \dots, l_m(\cdot))$ өрнектерімен анықталған және (2) шекаралық шарттарын, сондай-ақ (1.1.3) және (1.1.4) үйлесімділік шарттарын қанағаттандыратын тегіс функцияларда анықталған операторды Λ арқылы белгілейік. Ал $W_2^2(\Gamma)$ кеңістігінде $(l_1(\cdot), \dots, l_m(\cdot))$ өрнектер жиынымен анықталатын операторды $\Lambda_{\max}$ арқылы белгілейміз.

Граф-жұлдызындағы Штурм-Лиувилль операторының спектрлік талдаудағы тура есептеріне қатысты алғашқы сұрақтардың бірі болып «меншікті мәндер үшін «Вейл бағалауы» дұрыс па?» деген сұрақ табылады. $m = 1$ болған кездегі «Вейл бағалауын» еске түсірейік. Бұл жағдайда, Штурм-Лиувилль операторы (1.1.5), (1.1.6) және (1.1.7)

$$l(y) = -y''(x) + q(x)y(x), 0 < x < b_1, \qquad (1.1.5)$$

$$y'(0) - k_1 y(0) = 0, y'(b_1) - h_1 y(b_1) = 0 \qquad (1.1.6)$$

түрінде болады.

$$c(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1, s(0,\lambda) = c'(0,\lambda) = 0 \qquad (1.1.7)$$

шарттарын қанағаттандыратын (1.1.8)

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ 0 < x < b_1 \qquad (1.1.8)$$

біртекті теңдеуінің шешімінің іргелі шешімдер жүйесін $\{c(x,\lambda), s(x,\lambda)\}$ арқылы белгілейміз.

$\varphi(x,\lambda) = c(x,\lambda) + k_1\, s(x,\lambda$ болсын. Онда $\Delta(\lambda) = \varphi'(b_1,\lambda) - h_1\varphi(b_1,\lambda)$ бүтін функциясының $\{\lambda_n\}$ нөлдері $m = 1$ болғанда Λ операторының меншікті мәндері болады. $\lambda > 0$ үшін, ρ(λ) - λ –дан кіші немесе тең болатын меншікті мәндерінің саны. Алдыңғы авторлар [1–3] атап өткендей, сейкестендіру функциясы $\rho(\lambda) \sim \frac{b_1}{\pi}\lambda^{0,5}$ «Вейл бағалауын» қанағаттандырады. Меншікті мәндер бойынша мұндай айқын жіктеулерді кванттық графтарға таратуға әрекет жасағанда бірқатар қиындықтар туындайды.

Графтардағы Штурм-Лиувилль операторлары ақырлы кесіндідегі Штурм-Лиувилль операторларынан айтарлықтай ерекшеленеді. Егер граф-жұлдыздың қабырғаларының ұзындықтары бірдей болса, онда мұндай графтағы Штурм-Лиувилль операторының меншікті мәндерінің еселігін зерттеуде қиыдықтар туындайды. Атап айтқанда, жеке қабырғаларда нөлге айналатын ерекше меншікті функциялар пайда болуы мүмкін. Жалпы алғанда, жұлдыз - графында меншікті функция тепе-тең нөлден өзгеше.

Жұмысымыздың бұл бөлімінде жоғарыда айтылған өзгерістер байқалмайтын графтардың бір ерекшеліктері зерттеледі. Мұндай графтардағы Штурм-Лиувилль операторының ешбір меншікті функциясы жеке доғаларда тепе-тең нөлдік функцияға айнала алмайды.

Ұзындықтары $b_1, \dots, b_m$ болатын m ақырлы кесінділерді қарастырайық. $i = 1, \dots, m$ болғанда $L_2(0, b_i)$ кеңістігінен $q_i(x)$ нақты потенциалы мен h_i нақты санын қарастырайық. $i = 1, \dots, m$ болғанда $[0, b_i]$ кесіндісінде анықталу облысы (1.1.9)

$$D(L_i) = \{y \in W_2^2[0, b_i] : y(0) = 0,\ y'(b_i) - h_i y(b_i) = 0\} \qquad (1.1.9)$$

болатын (1.1.10)

$$L_i y(x) = -y''(x) + q_i(x)y(x), \quad x \in (0, b_i) \qquad (1.1.10)$$

Штурм-Лиувилль операторын енгізейік.

$i \neq j$ болғанда $\sigma(L_i) \cap \sigma(L_j) = \emptyset$, $L_1, \dots, L_m$ операторларының спектрлері қос -қостан қиылыспайтындай етіп $b_1, \dots, b_m$ сандарын таңдап алайық. Мұнда $\sigma(L_i)$ арқылы L_i операторының спектрі белгіленген. Мұндай таңдау әрқашанда мүмкін. Мысалы, егер $q_1(x) \equiv q_2(x) \equiv 0$ болса, онда L_1 және L_2 операторларының $b_1 h_1 \neq b_2 h_2$ болған кезде ортақ меншікті мәндері жоқ. Сонымен $b_1, \dots, b_m$ оң сандары $i \neq j$ болғанда L_i және L_j операторларының ортақ меншікті мәндері болмайтындай етіп таңдалды. Бұл талап алғаш рет В.М Левитанның жұмысында пайда болған [4]. Аталмыш талаптың орындалуы Λ операторының меншікті мәндерінің қарапайым болуын қамтамасыз ететіндігін төменде анықтайтын боламыз. Ал қазіргі бірінші мақсатымыз Λ операторының меншікті мәндерінің асимптотикалық жіктелулерін алу.

1.2 Граф- жұлдызындағы біртекті Штурм-Лиувилль теңдеуінің негізгі шешімдері

Бұл бөлімде біз граф- жұлдызындағы біртекті Штурм-Лиувилль теңдеуінің арнайы шешімдерін енгіземіз.

Егер 1-талап $b_1, \dots, b_m$ оң сандары $L_1, \dots, L_m$ операторларының $i \neq j$ болғанда ортақ меншікті мәндері болмайтындай етіп таңдалған болса, онда біз енгізетін арнайы шешімдер бірқатар тамаша қасиеттерге ие болады.

$j = 1, \dots, m-1$ болғанда $l_j(\varphi_j) = \lambda \varphi_j$, $x_j \epsilon e_j = (0, b_j)$ теңдеуінің $\varphi_j(x, \lambda)$ шешімін, $x_j = b_j$ болғанда Коши шартын қанағаттандыратын, енгізейік (1.2.1)

$$\varphi_j(b_j) = 1, \ \varphi_j'(b_j) = h_j \tag{1.2.1}$$

Әрбір e_j –ден тағайындалып алынған x_j үшін $\varphi_j(x_j, \lambda)$ функциясы $\lambda -$ дан тәуелді бүтін функциялар болатынын атап өтейік. $j = 1,2, \dots, m-1$ үшін $\varphi_j(0, \lambda)$ шамалары λ параметрінің ешқандай комплекс мәнінде бір уақытта нөлге айнала алмайды. Өйткені $b_1, \dots, b_m$ сандары 1-ші талапқа сәйкес арнайы таңдап алғаннан туындайды.

$\psi_j(x, \lambda) = B_j \varphi_j(x, \lambda)$, $x \epsilon e_j$ функциялар жүйесін енгізейік. $B_1, \dots, B_{m-1}$ сандары (1.2.2)

$$\{\psi_1(x_1, \lambda), \dots, \psi_{m-1}(x_{m-1}, \lambda)\} \tag{1.2.2}$$

функциялар жүйесі (3) шарттарды қанағаттандыратындай етіп таңдап алынған. $B_1, \dots, B_{m-1}$ сандарын (1.2.3)

$$B_j = B_m \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m-1} \varphi_i(0, \lambda), \tag{1.2.3}$$

орынды болатындай етіп таңдап алайық, мұндағы B_m барлық $j = 1, \dots, m-1$ үшін қандай да бір ортақ тұрақты.

Сондықтан, тұрақты B_m – ге дейінгі дәлдікпен келесі функциялар жүйесін енгізу ыңғайлы (1.2.4)

$$\{\kappa_1(x_1, \lambda), \dots, \kappa_{m-1}(x_{m-1}, \lambda)\}, \qquad (1.2.4)$$

мұндағы $B_m = 1$ болғанда $\kappa_j(x_j, \lambda) = \psi_j(x_j, \lambda)$.

$$\kappa'_m(0,\lambda) - k_m\kappa_m(0,\lambda) = -\sum_{i=1}^{m-1}\left(\varphi'_i(0,\lambda) - k_i\varphi_i(0,\lambda)\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m-1}\left(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{m-1}\varphi_s(0,\lambda)\,\varphi'_s(0,\lambda) - k_i\prod_{s=1}^{m-1}\varphi_s(0,\lambda)\right) \qquad (1.2.5)$$

(1.2.5) талабын және $\kappa_m(0,\lambda) = \prod_{i=1}^{m-1}\varphi_i(0,\lambda)$ шартын қанағаттандыратын $x_m \in (0, b_m)$ болғанда $l_m(\kappa_m) = \lambda\kappa_m$ біртекті теңдеуінің шешемін $\kappa_m(x_m, \lambda)$ арқылы белгілейік. $l_m(\kappa_m) = \lambda\kappa_m(x_m, \lambda),\ x_m \in e_m = (0, b_m)$ болғандықтан, $\kappa_m(x_m, \lambda) = \kappa_m(0,\lambda)c_m(x_m, \lambda) + \kappa'_m(0,\lambda)s_m(x_m, \lambda),\ x_m \in e_m$ орындалады. Мұндағы $c_m(x_m, \lambda)$ және $s_m(x_m, \lambda)$ шамалары $x_m = 0$ болғанда төмендігі (1.2.6)

$$s_m(0,\lambda) = c'_m(0,\lambda) = 0, \quad s'_m(0,\lambda) = c_m(0,\lambda) = 1 \qquad (1.2.6)$$

Коши шартын қанағаттандыратын $l_m(y_m) = \lambda y_m(x_m),\ x_m \in e_m$ біртекті теңдеуінің іргелі шешімдер жүйесі. Айта кетейік, $\kappa_m(x_m, \lambda)$ функциясы $x_m \in (0, b_m)$ тағайындалып алынғанда, λ айнымалысына қатысты бүтін функция болып табылады.

1.3 Λ операторының меншікті мәндерінің қарапайымдылығы

Бұл бөлімде біз Λ операторының меншікті мәндерінің қасиеттерін зерттейміз. $\Delta(\lambda) = \kappa'_m(b_m, \lambda) - h_m\kappa_m(b_m, \lambda)$ белгілеуін енгізейік. Келесі тұжырым ақиқат.

1-тұжырым. Егер 1-ші талап орындалса және $j = 1, \dots, m$ үшін $q_j(x_j) \in L_2(0, b_j)$ нақты потенциалдары және $h_j,\ k_j$ сандары нақты болса, онда Λ операторының спектрі тек қарапайым нақты меншікті мәндерден тұрады.

Тұжырымның дәлелдеуі. $L_2(\Gamma)$ функционалдық кеңістікте Λ операторы өзіне-өзі түйіндес болатыны [39] белгілі. Сондықтан, Λ операторының меншікті мәндерінің нақты болуы Гильберт кеңістіктеріндегі өз-өзіне түйіндес

операторлар туралы жалпы теоремалардан туындайды. Λ операторының тек қарапайым меншікті мәндері бар екенін дәлелдейік (1.3.1).

$\lambda, \mu \in R$ болсын. $\vec{\Phi}(\lambda) = \left(\kappa_1(x_1, \lambda), \kappa_2(x_2, \lambda), \ldots, \kappa_m(x_m, \lambda)\right)$ және $\vec{\Phi}(\mu) = \left(\kappa_1(x_1, \mu), \kappa_2(x_2, \mu), \ldots, \kappa_m(x_m, \mu)\right)$ белгілеулерін енгізейік.

$$R = \left\langle \Lambda_{\max} \vec{\Phi}(\lambda), \vec{\Phi}(\mu) \right\rangle_{L_2(\Gamma)} - \left\langle \vec{\Phi}(\lambda), \Lambda_{\max} \vec{\Phi}(\mu) \right\rangle_{L_2(\Gamma)} \tag{1.3.1}$$

айырымын қарастырайық, бір жағынан (1.3.2)

$$R = (\lambda - \mu)\left\langle \vec{\Phi}(\lambda), \vec{\Phi}(\mu) \right\rangle_{L_2(\Gamma)} \tag{1.3.2}$$

теңдігі ақиқат. Екінші жағынан [40] жұмыстағы Лагранж формуласын (1.3.3) қолдансақ,

$$R = -\Delta(\lambda)\kappa_m(b_m, \mu) + \kappa_m(b_m, \lambda)\Delta(\mu) \tag{1.3.3}$$

теңдігін аламыз.

$\lambda = \lambda_0$ Λ операторының кез-келген меншікті мәні болсын. Онда (1.3.4)

$$(\lambda_0 - \mu)\left\langle \vec{\Phi}(\lambda_0), \vec{\Phi}(\mu) \right\rangle_{L_2(\Gamma)} = \kappa_m(b_m, \lambda)\Delta(\mu) \tag{1.3.4}$$

Соңғы теңдікте $\mu \to \lambda_0$ деп алып шекке көшейік. Нәтижесінде келесі қатынасты аламыз (1.3.5):

$$\left\| \vec{\Phi}(\lambda_0) \right\|^2 = -\kappa_m(b_m, \lambda_0) \cdot \left. \frac{d\Delta(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\lambda_0} \tag{1.3.5}$$

$\left\| \vec{\Phi}(\lambda_0) \right\| > 0$ болғандықтан $\left. \frac{d\Delta(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\lambda_0} \neq 0$ болады. Осылайша Λ операторының меншікті мәндерінің қарапайымдылығы дәлелденді. Осыған ұқсас пайымдаулар [41]-ші жұмыста қолданылған.

1.4 Әртүрлі шекаралық шарттардағы сипаттамалық анықтауыштар арасындағы байланыс

Бұл бөлімде графтардағы дифференциалдық операторлар үшін Лагранж формуласы [40,42] кеңінен қолданылады. Алдымен [42] жұмыстан Лемма 1-ді еске түсірейік.

Лемма 1.1 $W_2^2(\Gamma)$ кеңістігіндегі кез келген екі $\vec{\Phi}(\vec{x}) = \left(\kappa_1(x_1), \kappa_2(x_2), \ldots, \kappa_m(x_m)\right)$ және $\vec{\Psi}(\vec{x}) = \left(\nu_1(x_1), \nu_2(x_2), \ldots, \nu_m(x_m)\right)$ функциялары үшін мына тепе-теңдік орындалады (1.4.1)

$$\langle \Lambda_{max} \vec{\Phi}, \vec{\Psi} \rangle - \langle \vec{\Phi}, \Lambda_{max} \vec{\Psi} \rangle = \sum_{j=1}^{m} \left(-\kappa_j^{(1)}(x_j)\overline{\nu_j(x_j)} + \kappa_j(x_j)\overline{\nu_j^{(1)}(x_j)} \right)\Big|_0^{b_j} \quad (1.4.1)$$

Толық түсіндіру мақсатында Лемма 1-дің дәлелдеуі келтіріледі, ол [8] еңбекте көрсетілген.

$W_2^2(\Gamma)$ кеңістігіндегі скалярлық көбейтіндінің анықтамасы бойынша мынаны аламыз (1.4.2) және (1.4.3):

$$\langle \Lambda_{max} \vec{\Phi}, \vec{\Psi} \rangle = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{b_j} (\Lambda_{max} k_j(x_j)\overline{\nu_j(x_j)} dx_j, \quad (1.4.2)$$

$$\langle \vec{\Phi}, \Lambda_{max} \vec{\Psi} \rangle = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{b_j} (k_j(x_j)\, \overline{\Lambda_{max} \nu_j(x_j)} dx_j, \quad (1.4.3)$$

Бірінші теңдіктен екінші теңдікті шегерсек, мынаны аламыз (1.4.4):

$$\langle \Lambda_{max} \vec{\Phi}, \vec{\Psi} \rangle - \langle \vec{\Phi}, \Lambda_{max} \vec{\Psi} \rangle == \sum_{j=1}^{m} (\int_0^{b_j} (\Lambda_{max} k_j(x_j)\overline{\nu_j(x_j)} dx_j - $$
$$- \int_0^{b_j} k_j(x_j)\overline{\Lambda_{max} \nu_j(x_j)} dx_j) \quad (1.4.4)$$

Теңдіктің оң жағындағы әрбір қосылғышқа Лемма1 - ді қолданамыз ($W_2^2(\Gamma)$ кеңістігінің әрбір қабырғасында). Онда бекітілген j үшін мынаны аламыз (1.4.5):

$$\int_0^{b_j} (\Lambda_{max} k_j(x_j)\overline{\nu_j(x_j)} dx_j = \left(-\kappa_j^{(1)}(x_j)\overline{\nu_j(x_j)} + \kappa_j(x_j)\overline{\nu_j^{(1)}(x_j)} \right)\Big|_0^{b_j} +$$
$$+ \int_0^{b_j} k_j(x_j)\overline{\Lambda_{max} \nu_j(x_j)} dx_j) \quad (1.4.5.)$$

Оң жағындағы интегралды сол жақ бөлікке көшірсек, төмендегі түрге келеді(1.4.6):

$$\int_0^{b_j} (\Lambda_{max} k_j(x_j)\overline{\nu_j(x_j)} dx_j - \int_0^{b_j} k_j(x_j)\overline{\Lambda_{max} \nu_j(x_j)} dx_j) =$$
$$= \left(-\kappa_j^{(1)}(x_j)\overline{\nu_j(x_j)} + \kappa_j(x_j)\overline{\nu_j^{(1)}(x_j)} \right)\Big|_0^{b_j} \quad (1.4.6)$$

Пайда болған теңдікті $j = 1, \dots, m$ бойынша қосындыласақ, келесі формуланы аламыз:

$$\langle \Lambda_{max} \vec{\Phi}, \vec{\Psi} \rangle - \langle \vec{\Phi}, \Lambda_{max} \vec{\Psi} \rangle = \sum_{j=1}^{m} \left(-\kappa_j{}^{(1)}(x_j)\overline{\nu_J(x_J)} + \kappa_j(x_j)\overline{\nu_J{}^{(1)}(x_J)} \right)\Big|_0^{b_j} \quad (1.4.7)$$

Лемма 1.1 дәлелденді.

Енді $j = 1, \dots, m$ үшін $\kappa_j(x_j) = \kappa_j(x_j, \lambda)$таңдап аламыз, мұндағы $\kappa_j(x_j, \lambda)$ – 1.2 бөлімде анықталған. Олар $\{h_1, \dots, h_m \quad k_1, \dots, k_m\}$ сандар жиынтығымен анықталады. Бұдан кейін біз $\{h_1, \dots, h_m \quad k_1, \dots, k_m\}$ екінші сандар жиынтығын таңдап аламыз, мұнда қандай да бір бекітілген s үшін $h_s = 0$. Енді $\nu_j(x_j, \bar{\lambda})$ арқылы $h_s = 0$ болғанда $\{h_1, \dots, h_m \quad k_1, \dots, k_m\}$ екінші сандар жиынтығына сәйкес келетін $\kappa_j(x_j, \bar{\lambda})$ функциясын белгілейік. Осының нәтижесінде Лемма 1-дегі тепе-теңдік төмендегідей түрге келеді (1.29):

$$\begin{aligned} 0=\langle \Lambda_{max} \vec{\Phi}, \vec{\Psi} \rangle - \langle \vec{\Phi}, \Lambda_{max} \vec{\Psi} \rangle = -\sum_{j=1}^{m} \left(-\kappa_j{}^{(1)}(x_j)\overline{\nu_j(x_j)} + + \kappa_j(x_j)\overline{\nu_j{}^{(1)}(x_j)} \right)\Big|_0 + \\ + \sum_{j=1, j\neq s}^{m-1} \left(-\kappa_j{}^{(1)}(x_j)\overline{\nu_j(x_j)} + \kappa_j(x_j)\overline{\nu_j{}^{(1)}(x_j)} \right)\Big|^{b_j} - \kappa_m{}^{(1)}(b_m)\overline{\nu_m(b_m)} + \\ + \kappa_m(b_m)\overline{\nu_m{}^{(1)}(b_m)} - \kappa_s{}^{(1)}(b_s)\overline{\nu_s(b_s)} + \kappa_s(b_s)\overline{\nu_s{}^{(1)}(b_s)} \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Сонымен қатар (1.4.9) және (1.4.10)

$$\sum_{j=1}^{m} \left(-\kappa_j{}^{(1)}(x_j)\overline{\nu_j(x_j)} + \kappa_j(x_j)\overline{\nu_j{}^{(1)}(x_j)} \right)\Big|_0 = 0, \quad (1.4.9)$$

$$\sum_{j=1, j\neq s}^{m-1} \left(-\kappa_j{}^{(1)}(x_j)\overline{\nu_j(x_j)} + \kappa_j(x_j)\overline{\nu_j{}^{(1)}(x_j)} \right)\Big|^{b_j} = 0 \quad (1.4.10)$$

екенін байқаймыз.

Осылайша, келесі теңдікті аламыз (1.4.11)

$$\begin{aligned} -\kappa_m{}^{(1)}(b_m)\overline{\nu_m(b_m)} + \kappa_m(b_m)\overline{\nu_m{}^{(1)}(b_m)} - \kappa_s{}^{(1)}(b_s)\overline{\nu_s(b_s)} + \\ + \kappa_s(b_s)\overline{\nu_s{}^{(1)}(b_s)} = 0 \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

$\Delta(\lambda) = \kappa'_m(b_m, \lambda) - h_m\kappa_m(b_m, \lambda)$ болғандықтан келесі теңдікті аламыз (1.4.13)

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda)\overline{\nu_m(b_m)} = \kappa_m(b_m)\left(\overline{\nu_m{}^{(1)}(b_m)} - h_m\overline{\nu_m(b_m)}\right) + \kappa_s(b_s)(\overline{\nu_s{}^{(1)}(b_s)} - \\ - h_s\overline{\nu_s(b_s)}) \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

$h_s = 0$ болғанда $\nu_m{}^{(1)}(b_m) - h_m\nu_m(b_m) = \Delta(\lambda)$ болатынын байқауға болады. Сондықтан, оны $\Delta_s(\lambda) = \nu_m{}^{(1)}(b_m) - h_m\nu_m(b_m)$ арқылы белгілейміз.

Лемма 1.2. Сипаттамалық анықтауыштар арасында келесі қатынас орынды (1.4.14):

$$\Delta(\lambda)\overline{\nu_m(b_m)} = \kappa_m(b_m)\Delta_s(\lambda) + \kappa_s(b_s)(\overline{\nu_s{}^{(1)}(b_s)}\text{-}h_s\overline{\nu_s(b_s)}) \quad (1.4.14)$$

Лемма 1.3. Дәл осылай сипаттамалық анықтауыштар арасында келесі қатынастарды алуға болады (1.4.15)

$$\Delta(\lambda)\prod_{i=1,i\neq s}^{m-1}\zeta_i(0,\bar{\lambda}) = \overline{\delta_s(\overline{\lambda})}\prod_{i=1,i\neq s}^{m-1}\varphi_i(0,\lambda) \quad (1.4.15)$$

Мұнда келесіндей белгілеулер ескерілген. $x_j = b_j$ болғанда төмендегі Коши шартын (1.4.16)

$$\zeta_j(b_j) = 1,\ \zeta_j'(b_j) = h_j \quad (1.4.16)$$

қанағаттандыратын $l_j(\zeta_j) = \lambda\zeta_j,\ x_j\epsilon e_j = (0, b_j)$ теңдеуінің $j = 1, \dots, m$ және $j \neq s$ болғандағы $\zeta_j(x,\lambda)$ шешімін енгіздік.

e_j-дан алынған бекітілген x_j үшін $\zeta_j(x_j,\lambda)$ функциялары λ -дан тәуелді бүтін функция болатынын еске саламыз. $\zeta_j(0,\lambda)$ шамалары $j = 1,2,\dots,m-1$ үшін λ параметрдің ешқандай комплекс мәндерінде бір уақытта нөлге айнала алмайды. Өйткені $b_1, \dots, b_m$ сандары 1 – ші талапқа сәйкес арнайы таңдалып алынған.

$\xi_j(x,\lambda) = C_j\zeta_j(x,\lambda),\ x\epsilon e_j$ функциялар жүйесін енгіземіз. $C_j, j \neq s$ сандары (1.4.17)

$$\{\xi_j(x_j,\lambda), j \neq s\} \quad (1.4.17)$$

функциялар жүйесі (3)-ші шартты қанағаттыратындай етіп таңдалып алынған. $C_j, j \neq s$ сандарын келесі түрде таңдап алайық (1.4.18):

$$C_j = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j\\ i\neq s}}^{m}\zeta_i(0,\lambda), \quad (1.4.18)$$

$x_s \in (0, b_s)$ үшін $\xi_s(0,\lambda) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\zeta_i(0,\lambda)$ шартын және (1.4.19)

$$\xi_s'(0,\lambda) - k_s\xi_s(0,\lambda) = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}(\xi_i'(0,\lambda) - k_i\xi_i(0,\lambda)) \quad (1.4.19)$$

талабын қанағаттандыратындай $l_s(\xi_s) = \lambda\xi_s$ біртекті теңдеуінің шешімін $\xi_s(x_s,\lambda)$ арқылы белгілейік. $l_s(\xi_s) = \lambda\xi_s(x_s,\lambda),\ x_s \in e_s = (0, b_s)$ болғандықтан (1.4.20)

$$\xi_s(x_s,\lambda)=\xi_s(0,\lambda)c_s(x_s,\lambda)+\xi_s'(0,\lambda)s_s(x_s,\lambda),\ x_s\in e_s \qquad (1.4.20)$$

Мұндағы $c_s(x_s,\lambda)$ және $s_s(x_s,\lambda)$ дегеніміз $x_s=0$ үшін (1.4.21)

$$s_s(0,\lambda)=c_s'(0,\lambda)=0,\quad s_s'(0,\lambda)=c_s(0,\lambda)=1 \qquad (1.4.21)$$

Коши шартын қанағаттандыратын $l_s(y_s)=\lambda y_s(x_s),\ x_s\in e_s$ біртекті теңдеуінің іргелі шешімдер жүйесі.

$\xi_s(x_s,\lambda)$ функциясы бекітілген $x_s\in(0,b_s)$ мәні үшін λ −дан тәуелді бүтін функция болатынын ескерейік. $h_s=0$ болғанда меншікті мәндер есептерінің $\delta_s(\lambda)=\xi'_s(b_s,\lambda)$ сипаттамалық анықтауышын енгізейік. Осы енгізілген белгілеулерде Лемма 3 ақиқат болады.

Мысал 1. $m=2$ және $b_1=1,\ b_2=\pi$ болсын. $\{q_1(x)\equiv 0,\ q_2(x)\equiv 0\}$ функциялар жиынтығын бекітеміз. h_1,h_2 сандарын $h_1\neq\pi\ h_2$ болатындай етіп таңдаймыз. Онда талап 1 орындалады. 1.2 бөліміне сәйкес (1.4.22), (1.4.23)

$$\kappa_1(x_1,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,(1-x_1)-h_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}(1-x_1)}{\sqrt{\lambda}}, \qquad (1.4.22)$$

$$\kappa_2(x_2,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,(1+x_2)-h_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}(1-x_2)}{\sqrt{\lambda}}-Kh_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x_2}{\lambda} \qquad (1.4.23)$$

функциясын аламыз.

1.3 бөліміне сәйкес төмендегідей сипаттамалық анықтауышты енгізейік (1.4.24).

$$\Delta(\lambda)=\kappa'_2(\pi,\lambda)-h_2\kappa_2(\pi,\lambda)=$$

$$=-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,(1+\pi)+h_1\cos\sqrt{\lambda}\,(1-\pi)-h_2\cos\sqrt{\lambda}\,(1+\pi)$$

$$+h_1h_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}(1-\pi)}{\sqrt{\lambda}}-Kh_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}}+Kh_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}{\lambda} \qquad (1.4.24)$$

$h_1=0$ болатындай етіп екінші $\{h_1,h_2\ \ k_1,k_2\}$ сандар жиынтығын таңдайық. Бұл жағдайда 1.3 бөліміне сәйкес сипаттамалық анықтауыш мынадай (1.4.25) түрге келеді

$$\Delta_1(\lambda)=\nu_2{}^{(1)}(\pi)-h_2\nu_2(\pi)=-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,(1+\pi)-h_2\cos\sqrt{\lambda}\,(1+\pi). \qquad (1.4.25)$$

Сонымен қатар $\nu_1(x_1,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,(1-x_1),\ \nu_2(x_2,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,(1+x_2)$. Осы орайда 2-лемма тұжырымы келесідей түрленеді

$$\Delta(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,(1+\pi)=$$
$$=\left(\cos\sqrt{\lambda}\,(1+\pi)-h_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(1-\pi)}{\sqrt{\lambda}}-Kh_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi}{\lambda}\right)\Delta_1(\lambda).$$

Мысал 2. $m=3$ және $b_1=1, b_2=\pi, b_3=\sqrt{2}$ болсын. $\{q_1(x)\equiv 0, q_2(x)\equiv 0, q_3(x)\equiv 0\}$ функциялар жиынтығын бекітіп алайық. h_1, h_2, h_3 сандарын $h_1\neq\pi, h_2\neq\sqrt{2}h_3$ болатындай етіп таңдап алайық. Онда 1-талап орындалады. 1.2 тарауына сәйкес келесі функцияларды енгізейік

$$\kappa_1(x_1,\lambda)=\varphi_2(0,\lambda)\varphi_1(x_3,\lambda)=$$
$$=\left(\cos\sqrt{\lambda}-h_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(\cos\sqrt{\lambda}\,(1-x_1)-h_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(1-x_1)}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\kappa_2(x_2,\lambda)=\varphi_1(0,\lambda)\varphi_2(x_3,\lambda)=$$
$$=\left(\cos\sqrt{\lambda}-h_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(\cos\sqrt{\lambda}\,(\pi-x_2)-h_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(\pi-x_2)}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\kappa_3(x_3,\lambda)=\varphi_1(0,\lambda)\varphi_2(0,\lambda)c_3(x_3,\lambda)+\ \varphi_1'(0,\lambda)\varphi_2'(0,\lambda)s_3(x_3,\lambda)=$$
$$=\left(\cos\sqrt{\lambda}-h_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(\cos\sqrt{\lambda}-h_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\cos\sqrt{\lambda}\,(1-x_3)+$$
$$+\left(-\sqrt{\lambda}\,sin\sqrt{\lambda}+h_1\,cos\sqrt{\lambda}\right)\left(-\sqrt{\lambda}\,sin\sqrt{\lambda}+h_2\,cos\sqrt{\lambda}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(\pi-x_3)}{\sqrt{\lambda}}$$

$j=1,2$ болғанда $-\varphi_j''(x_j)=\lambda\varphi_j,\ x_j\epsilon e_j=(0,b_j)$ теңдеуінің $x_j=b_j$ үшін Коши шарттарын қанағаттандыратын $\varphi_j(x,\lambda)$ шешімі:

$$\varphi_1(1)=1,\qquad \varphi_1'(1)=h_1,$$

$$\varphi_2(\pi)=1,\ \varphi_2'(\pi)=h_2.$$

$\psi_j(x,\lambda)=B_j\varphi_j(x,\lambda),\ x\epsilon e_j$ функциялар жүйесін енгізейік. B_1, B_2 сандары $\{\psi_1(x_1,\lambda),\psi_2(x_2,\lambda)\}$ функциялар жүйесі (3) шарттарын қанағаттандыратындай етіп таңдалынған. B_1, B_2 сандарын келесідей түрде таңдайық:

$$B_1=B_3\cdot\left(\cos\sqrt{\lambda}-h_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$B_2=B_3\cdot\left(\cos\sqrt{\lambda}-h_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

мұндағы B_3 −барлық $j = 1,2$ үшін қандайда бір ортақ тұрақты. Сондықтанда B_m тұрақтысына дейінгі дәлдікпен $\{\kappa_1(x_1,\lambda), \kappa_2(x_2,\lambda)\}$ функциялар жүйесін енгізу тиімді, мұндағы $\kappa_1(x_1,\lambda) = \psi_1(x_1,\lambda),\ \kappa_2(x_2,\lambda) = \psi_2(x_2,\lambda)$, $B_3 = 1$.

$\kappa_3(x_3,\lambda)$ арқылы $\kappa_3(0,\lambda) = \varphi_1(0,\lambda) + \varphi_2(0,\lambda)$ шартын, сондай-ақ төмендегі талапқа сай

$$\kappa_3'(0,\lambda) - k_3\kappa_3(0,\lambda) = -\Big(\big(\varphi_1'(0,\lambda) + \varphi_2'(0,\lambda)\big) - k_3\big(\varphi_1(0,\lambda) + \varphi_2(0,\lambda)\big)\Big) =$$

$$= -\Bigg(\big(-\sqrt{\lambda}\,sin\,\sqrt{\lambda} + h_1\,cos\,\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\,sin\,\sqrt{\lambda} + h_1\,cos\,\sqrt{\lambda}\big)$$

$$- k_3\left(\cos\sqrt{\lambda} - h_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \cos\sqrt{\lambda} - h_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\Bigg) =$$

$$= -\Bigg(\big(-2\sqrt{\lambda}\,sin\,\sqrt{\lambda} + (h_1 + h_2)\,cos\,\sqrt{\lambda}\big)$$

$$- k_3\left(2\cos\sqrt{\lambda} - (h_1 + h_2)\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\Bigg)$$

$-\kappa_3''(x_3) = \lambda\kappa_3(x_3),\ x_3 \in \big(0,\sqrt{2}\big)$ біртекті теңдеудің шешімін белгілейік.

$-\kappa_3''(x_3,\lambda) = \lambda\kappa_3(x_3,\lambda),\ x_3 \in e_3 = \big(0,\sqrt{2}\big)$ болғандықтан,

$$\kappa_3(x_3,\lambda) = \kappa_3(0,\lambda)c_3(x_3,\lambda) + \kappa_3'(0,\lambda)s_3(x_3,\lambda), \qquad x_3 \in e_3.$$

Мұнда $c_3(x_3,\lambda)$ және $s_3(x_3,\lambda)$- $x_3 = 0$ үшін төмендегі Коши шарта бағынатын

$$s_3(0,\lambda) = c_3'(0,\lambda) = 0, \quad s_3'(0,\lambda) = c_3(0,\lambda) = 1$$

$-y_3''(x_3) = \lambda y_3(x_3),\ x_3 \in e_3$ біртекті теңдеудің іргелі шешімдерінің жүйесі.

$\kappa_3(x_3,\lambda)$ - λ –дан тәуелді бекітілген $x_3 \in \big(0,\sqrt{2}\big)$ үшін бүтін функция екенін ескерейік.

1.3 тарауына сәйкес сипаттамалық анықтауышты енгізейік

$$\Delta(\lambda) = -\Bigg(\Big(-2\sqrt{\lambda}\,sin\,\sqrt{\lambda}\big(1-\sqrt{2}\big) + (h_1 + h_2)\,cos\,\sqrt{\lambda}\,\big(1-\sqrt{2}\big)\Big)$$

$$- k_3\left(2\cos\sqrt{\lambda}\big(1-\sqrt{2}\big) - (h_1 + h_2)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\big(1-\sqrt{2}\big)}{\sqrt{\lambda}}\right)\Bigg),$$

онда

$$\Delta(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\left(1+\sqrt{2}\right)=$$
$$=\left(\left(\cos\sqrt{\lambda}-h_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(\cos\sqrt{\lambda}-h_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\cos\sqrt{\lambda}\left(1-\sqrt{2}\right)\right.$$
$$+\left(-\sqrt{\lambda}\,sin\sqrt{\lambda}+h_1\,cos\sqrt{\lambda}\right)\left(-\sqrt{\lambda}\,sin\sqrt{\lambda}\right.$$
$$\left.\left.+h_2\,cos\sqrt{\lambda}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(\pi-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\left(1+\sqrt{2}\right)\right.$$
$$\left.-h_3\cos\sqrt{\lambda}\left(1+\sqrt{2}\right)\right)+\kappa_s(b_s)(\overline{{\nu_s}^{(1)}(b_s)}-h_s\overline{\nu_s(b_s)}).$$

$h_s=0$ үшін $\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\left(1+\sqrt{2}\right)-h_3\cos\sqrt{\lambda}\left(1+\sqrt{2}\right)=\Delta(\lambda)$ екенін байқаймыз. Сондықтан оны былай белгілейік

$$\Delta_s(\lambda)=\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\left(1+\sqrt{2}\right)-h_3\cos\sqrt{\lambda}\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Сипаттамалық анықтауыштар арасында келесі қатынастар орынды

$$\Delta(\lambda)\overline{\nu_m\left(b_m,\bar{\lambda}\right)}=\left(\left(\cos\sqrt{\lambda}-h_1\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(\cos\sqrt{\lambda}-h_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\cos\sqrt{\lambda}\left(1-\sqrt{2}\right)+\right.$$
$$\left.\left(-\sqrt{\lambda}\,sin\sqrt{\lambda}+h_1\,cos\sqrt{\lambda}\right)\left(-\sqrt{\lambda}\,sin\sqrt{\lambda}+h_2\,cos\sqrt{\lambda}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(\pi-\sqrt{2})}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\left(1-\right.\right.$$
$$\left.\left.\sqrt{2}\right)-h_3\cos\sqrt{\lambda}\left(1-\sqrt{2}\right)\right)+\kappa_s(b_s,\lambda)(\overline{{\nu_s}^{(1)}\left(b_s,\bar{\lambda}\right)}-h_s\overline{\nu_s\left(b_s,\bar{\lambda}\right)}).$$

1.5 Λ операторының меншікті мәндерінің асимптотикалық формулалары

Бұл бөлімде біз зерттелініп отырған оператордың меншікті мәндерінің асимптотикалық жіктелуін ұсынамыз. Ол үшін спектрлік парметр бойынша біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімдерін экспоненциалдық қатарға жіктейміз. Бұл қатарларды Ж.Хужахметов өз еңбектерінде ұсынған [43,44]. Ж. Хужахметовтың еңбектерінің нәтижесіне сәйкес

$$\varphi(0)=1,\qquad \varphi'(0)=h$$

шарттарын қанағаттандыратын

$$-\varphi''(x)+q(x)\varphi(x)=\lambda\varphi(x),0<x<b,$$

біртекті теңдеудің шешімі келесі түрде болады

$$\varphi(x,\rho) = |\lambda = \rho^2| =$$
$$= cos\rho x + \big(h + R_1(x)\big)\frac{sin\rho x}{\rho} + \int_0^x S_1(x,\tau)\frac{sin\big(\rho(2\tau - x)\big)}{\rho}d\tau +$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}\Big[\big(R_n(x) + hR_{n-1}(x)\big)cos\left(\rho x - \frac{n\pi}{2}\right) + \int_0^x\big(S_n(x,\tau) +$$
$$hS_{n-1}(x,\tau)\big)cos\left(\rho(2\tau - x) - \frac{n\pi}{2}\right)d\tau\Big]. \qquad (1.5.1)$$

Мұнда $\{R_n(x)\},\{S_n(x,\tau)\}$ функцияларының тізбегі спектрлік параметрге тәуелді емес. Мысалға,

$$R_n(t_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n}\int_0^{t_{i+1}} q(t_i)dt_i\,, n > 0,$$
$$S_1(t_2,\tau) = -q\left(\frac{\tau + t_2}{2}\right),$$
$$S_2(t_3,\tau) = -q\left(\frac{\tau + t_3}{2}\right)\int_0^{\frac{\tau+t_3}{2}} q(t_1)dt_1 - \int_{\frac{-\tau+t_3}{2}}^{t_3} q\left(\frac{\tau + 2t_2 - t_3}{2}\right)q(t_2)dt_2 +$$
$$+q\left(\frac{\tau + t_3}{2}\right)\int_{\frac{\tau+t_3}{2}}^{t_3} q(t_2)dt_2,$$
$$S_3(t_4,\tau) = -q\left(\frac{\tau + t_4}{2}\right)\int_0^{\frac{\tau+t_4}{2}} q(t_2)dt_2\int_0^{t_2} q(t_1)dt_1 -$$
$$-\int_{\frac{-\tau+t_4}{2}}^{t_4} q\left(\frac{\tau+2t_3-t_4}{2}\right)q(t_3)dt_3\int_0^{\frac{\tau+2t_3-t_4}{2}} q(t_1)dt_1 +$$
$$+q\left(\frac{\tau + t_4}{2}\right)\int_{\frac{\tau+t_4}{2}}^{t_4} q(t_3)dt_3\int_0^{\frac{\tau+t_4}{2}} q(t_1)dt_1 +$$
$$+\int_{\frac{\tau+t_4}{2}}^{t_4} q(t_3)dt_3\int_{\frac{-\tau+2t_3-t_4}{2}}^{t_3} q\left(\frac{\tau + 2t_2 - 2t_3 + t_4}{2}\right)q(t_2)dt_2 -$$
$$-\int_{\frac{-\tau+t_4}{2}}^{t_4} q(t_3)dt_3\int_{\frac{-\tau+t_4}{2}}^{t_3} q\left(\frac{\tau + 2t_2 - t_4}{2}\right)q(t_2)dt_2 +$$

$$+\int_{\frac{-\tau+t_4}{2}}^{t_4} q\left(\frac{\tau+2t_3-t_4}{2}\right)q(t_3)dt_3\int_{\frac{\tau+2t_3-t_4}{2}}^{t_3} q(t_2)dt_2 -$$

$$-q\left(\frac{\tau+t_4}{2}\right)\int_{\frac{\tau+t_4}{2}}^{t_4} q(t_3)dt_3\int_{\frac{\tau+t_4}{2}}^{t_3} q(t_2)dt_2.$$

Көрсетілген тізбектердің басқа мүшелері үшін де сәйкес формулаларды жазып шығаруға болады. Біз бұны әр түрлі себептерге байланысты келтірмейміз.

Егер $[0,b]$ кесіндісінде $q(x)$ функциясы үздіксіз дифференциалданатын болса, онда (1.5.1) теңдігінің оң жақ бөлігін мүшелеп дифференциалдауға болады.

1.3 бөлімінде нөлдері Λ операторының қарапайым меншікті мәндері болатын $\Delta(\lambda)=\kappa'_m(b_m,\lambda)-h_m\kappa_m(b_m,\lambda)$ сипаттамалық анықтауышы анықталған. $\{\kappa_1(x_1,\lambda),\dots,\kappa_m(x_m,\lambda)\}$ функциялар жиынтығының анықтамасын еске түсіре отырып, граф-жұлдызда анықталған Штурм – Лиувилль біртекті теңдеуінің негізгі шешімдері арқылы $\Delta(\lambda)$ сипаттамалық анықтауыштың формуласын өрнектеуге болады. Сонымен келесі теңдік орындалады

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda)=\ &\kappa_m(0,\lambda)c'_m(b_m,\lambda)+\kappa'_m(0,\lambda)s'_m(b_m,\lambda)-h_m\kappa_m(0,\lambda)c_m(b_m,\lambda)-\\ &-h_m\kappa'_m(0,\lambda)s_m(b_m,\lambda)=\kappa_m(0,\lambda)\big(c'_m(b_m,\lambda)-h_mc_m(b_m,\lambda)\big)+\\ &+\kappa'_m(0,\lambda)\big(s'_m(b_m,\lambda)-h_ms_m(b_m,\lambda)\big)=\textstyle\prod_{i=1}^{m-1}\varphi_i(0,\lambda)\,\big(c'_m(b_m,\lambda)-\\ &-h_mc_m(b_m,\lambda)\big)\text{-}\Big(\textstyle\sum_{i=1}^{m-1}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{m-1}\varphi_s(0,\lambda)\,\varphi'_i(0,\lambda)-\\ &-\textstyle\sum_{i=1}^{m}k_i\prod_{i=1}^{m-1}\varphi_i(0,\lambda)\Big)\,(s'_m(b_m,\lambda)-h_ms_m(b_m,\lambda)).\end{aligned}$$

Әрбір $\big(s'_m(b_m,\lambda)-h_ms_m(b_m,\lambda)\big),\varphi_1(0,\lambda),\dots,\varphi_{m-1}(0,\lambda)$ функциялары спектрлік параметрі бойынша экспоненциалдық қатар ретінде берілетіндіктен, $\Delta(\lambda)$ сипаттамалық анықтауышта спектрлік параметр бойынша экспоненциалдық қатар түрінде өрнектелуі мүмкін.

Енді $\Delta(\lambda)$ сипаттамалық анықтауышының экспоненциалдық қатарындағы алғашқы бірнеше мүшелерін есептеуге көшейік. Ол үшін бізге $q_1(x),\dots,q_m(x)$ функцияларының үздіксіз бірінші туындыларының бар болуы қажетті. Бұдан әрі 2- талап орындалған деп есептейміз: $q_1(x_1),\dots,q_m(x_m)$ (олардың анықталу облыстарында) үздіксіз дифференцияланатын функциялар. Алдымен $q_j(x_j)=0,h_j=0,k_j=0,j=1,\dots,m$ үшін, $\Delta_0(\lambda)$ сипаттамалық анықтауышын жазамыз.

$$\Delta_0(\lambda)=|\lambda=\rho^2|=-\rho\textstyle\sum_{j=1}^{m}sin\rho b_j\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}cos\rho b_i.$$

формуласы орынды.

1-тұжырымнан мынандай нәтиже шығады, егер $q_j(x_j) = 0, h_j = 0,\ j = 1, \dots, m$ үшін 1 талап орындалатын болса, онда $\Delta_0(\lambda)$ функциясының нөлдері тек нақты қарапайым нөлдер болады. $\Delta_0(\lambda)$ сипаттамалық анықтауыштың нөлдерін $\{\lambda_n^0\}$ деп белгілейік. Меншікті мәндер $\{\lambda_n^0\}$ меншікті мәндерінің нөмірлері өсу реті бойынша солдан оңға қарай жүргізіледі. Оператор төменнен жартылай шектелген болғандықтан бұл мүмкін. Сондай-ақ, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^0 = \infty$ екендігін атап өтейік. s - ті жеткілікті үлкен натурал сан ретінде бекітейік. $\Delta(\lambda)$ сипаттамалық анықтауышының нөлін келесі түрде іздейміз

$$\rho_s = \rho_s^0 + \delta_s, \lambda_s = \rho_s^2,$$

мұндағы δ_s қандай да бір шектелген белгісіз шама.
1-тұжырымына сәйкес λ_s, δ_s шамалары нақты сандар болады деп есептеуге болады. Келесі шаманы есептейік

$$\varphi_j(0, \lambda_s) = cos\ \rho_s b_j + \left(h_j + R_{1j}(b_j)\right)\frac{sin\ \rho_s b_j}{\rho_s} + \int_0^{b_j} S_{1j}(x, \tau)\frac{sin\left(\rho_s(2\tau - b_j)\right)}{\rho_s}d\tau$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{{\rho_s}^n}\left[\left(R_{nj}(b_j) + h_j R_{n-1j}(b_j)\right)cos\left(\rho_s b_j - \frac{n\pi}{2}\right) + \int_0^{b_j}\left(S_{nj}(b_j, \tau) + h_j S_{n-1j}(b_j, \tau)\right)cos\left(\rho_s(2\tau - b_j) - \frac{n\pi}{2}\right)d\tau\right].$$

Келесі шарт орындалатындықтан

$$\varphi_j(0, \lambda_s) = cos\ \rho_s b_j(1 + o(1)), s \to \infty.$$

Дәл осылайша келесі қатынастарды аламыз

$$\varphi'_j(0, \lambda_s) = \rho_s sin\ \rho_s b_j(1 + o(1)), s \to \infty.$$
$$c'_m(b_m, \lambda_s) = -\rho_s sin\ \rho_s b_m\big(1 + o(1)\big), s \to \infty.$$
$$s'_m(b_m, \lambda_s) = cos\ \rho_s b_m(1 + o(1)), s \to \infty.$$
$$c_m(b_m, \lambda_s) = cos\ \rho_s b_m(1 + o(1)), s \to \infty.$$
$$s_m(b_m, \lambda_s) = o(1), s \to \infty.$$

Нәтижесінде $\Delta(\lambda_s) = \Delta_0(\lambda_s)(1 + o(1)), s \to \infty$ болады. Бұдан $\lim\limits_{s\to\infty}\delta_s = 0$ екені шығады. Енді, $\lim\limits_{s\to\infty}\delta_s = 0$ екенін ескеріп келесі мәнді дәлірек есептейік

$$\varphi_j(0, \lambda_s), \varphi'_j(0, \lambda_s), c'_m(b_m, \lambda_s), s'_m(b_m, \lambda_s), c_m(b_m, \lambda_s), s_m(b_m, \lambda_s).$$

Ол үшін бізге келесі леммалар қажет болады.

Лемма 1.4. Нақты $\rho \to \infty$ үшін келесі асимптотикалық өрнектелулер ақиқат

$$\varphi(x,\lambda) = cos\rho(b-x) + \left(-h + \int_x^b q(t)dt\right)\frac{sin\rho(b-x)}{\rho} -$$
$$-\int_x^b q\left(\frac{x+\tau}{2}\right)\frac{sin\rho(b-2\tau+x)}{\rho}d\tau + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right),$$
$$\varphi'(x,\lambda) = \rho sin\rho(b-x) - \left(-h + \int_x^b q(t)dt\right)cos\rho(b-x)$$
$$-\int_x^b q\left(\frac{x+\tau}{2}\right)cos\rho(b-2\tau+x)d\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int_x^b q'\left(\frac{x+\tau}{2}\right)\frac{sin\rho(b-2\tau+x)}{\rho}d\tau -$$
$$-\frac{1}{\rho}\left(\int_x^b q(t_2)\int_{t_2}^b q(t_1)\,dt_1dt_2 - h\int_x^b q(t)dt\right)sin\rho(b-x) -$$
$$-\frac{1}{\rho}\int_x^b q\left(\frac{x+\tau}{2}\right)sin\rho(b-2\tau+x)\int_{\frac{x+\tau}{2}}^b q(b-t)\,dtd\tau -$$
$$-\frac{1}{\rho}h\int_x^b q\left(\frac{x+\tau}{2}\right)sin\rho(b-2\tau+x)d\tau -$$
$$-\frac{1}{\rho}\int_0^{b-x} sin\rho(2\tau-b+x)\int_{\frac{b-x+\tau}{2}}^{b-x} q\left(\frac{b-\tau-2t-x}{2}\right)q(b-t)\,dtd\tau -$$
$$-\frac{1}{\rho}\int_0^{b-x} sin\rho(2\tau-b+x)q\left(\frac{x+\tau-x}{2}\right)\int_{\frac{\tau+b-x}{2}}^{b-x} q(b-t)dt\,d\tau + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right).$$

Бұл лемма 1.4-те біз төменгі j индексін әдейі алып тастадық, негізінде φ_j, b_j, q_j деп жазу керек еді.

Лемма 1.5. Нақты $\rho \to \infty$ үшін келесі асимптотикалық өрнектелулер ақиқат

$$c(x,\lambda_s) = cos\rho x + \frac{sin\rho x}{\rho}\int_x^b q(t)dt - \int_0^x q\left(\frac{\tau+x}{2}\right)\frac{sin\rho(2\tau-x)}{\rho}d\tau + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$c'(x,\lambda_s) = -\rho sin\rho x + cos\rho x\int_x^b q(t)dt + \int_0^x q\left(\frac{\tau+x}{2}\right)cos\rho(2\tau-x)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x q'^{\left(\frac{\tau+x}{2}\right)}\frac{sin\rho(2\tau-x)}{\rho}d\tau + \frac{sin\rho x}{\rho}\int_0^x q(t_2)dt_2\int_0^{t_2} q(t_1)dt_1 +$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_0^x\left(-q\left(\frac{\tau+x}{2}\right)\int_0^{\frac{\tau+x}{2}} q(t_1)dt_1 - \int_{\frac{-\tau+x}{2}}^x q\left(\frac{\tau+2t_2-x}{2}\right)q(t_2)dt_2\right.$$

$$\left. + q\left(\frac{\tau+x}{2}\right)\int_{\frac{\tau+x}{2}}^x q(t_2)dt_2\right)sin\rho(2\tau-x)d\tau + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

Лемма 1.6. Нақты $\rho \to \infty$ үшін келесі асимптотикалық өрнектелулер ақиқат

$$s(x,\lambda_s) = \frac{sin\rho x}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$s'(x,\lambda_s) = cos\rho x + \frac{sin\rho x}{\rho}\int_x^b q(t)dt - \int_0^x q\left(\frac{\tau+x}{2}\right)\frac{sin\rho(2\tau-x)}{\rho}d\tau + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

1.5 және 1.6 леммаларда m төменгі индексі жазылмаған, негізінде c_m, s_m, b_m, q_m деп жазу керек еді.

Енді $\rho_s = \rho_s^0 + \delta_s, \lambda_s = \rho_s^2$ және $\lim\limits_{s\to\infty}\delta_s = 0$ болсын. $\Delta_1(\lambda)$ арқылы $\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)$ айырымын белгілейік. $|\rho\Delta_1(\lambda)|$ шамасы нақты $\rho \to \infty$ үшін шектелген екенін ескерейік. $\Delta(\lambda_s) = 0$ және $\Delta_0(\lambda_s^0) = 0$ болсын. Онда

$$\Delta_1(\rho_s) = -\Delta_0(\rho_s) = -\Delta_0(\rho_s^0 + \delta_s) = -\Delta_0(\rho_s^0) - (\rho_s - \rho_s^0)\Delta_0'(\rho_s^0) + o(\delta_s), s \to \infty.$$

Сондықтан

$$\delta_s = -\frac{\Delta_1(\rho_s^0)}{\Delta_0'(\rho_s^0)},$$

және де $\Delta_0'(\rho_s^0) \neq 0$, өйткені $\Delta_0(\lambda)$ сипаттамалық анықтауышының тек қарапайым нөлдері бар.

$\Delta_0'(\rho)$ және $\Delta_1(\rho)$ бейнелеулерінен $\rho \to \infty$ болғанда, $\lim\limits_{s\to\infty} \delta_s = 0$ екеніне көз жеткіземіз. 4, 5, 6 леммаларын қолдана отырып, келесі бейнені

$$\delta_s = -\frac{\alpha_1(\rho_s^0)}{\rho_s^0}$$

аламыз, мұндағы $\alpha_1(\rho_s^0)$ – шамасы $\rho_s^0 \to \infty$ болғанда шектелген шама.
Сонымен, келесі тұжырым ақиқат.

Теорема 1.1. 1 және 2 шарттары орындалсын. $\{\lambda_n^0\}$ арқылы $\Delta_0(\lambda) = |\lambda = \rho^2| = -\rho \sum_{j=1}^{m} sin\rho b_j \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} cos\rho b_i$ сипаттамалық анықтауышының нөлдерін белгілейік. $\{\lambda_n^0\}$ меншікті мәндерінің нөмірі солдан оңға қарай меншікті мәндердің өсу реті бойынша жүргізіледі. Бұл мүмкін, өйткені оператор төменгі жағынан шектелген. Сонымен қатар, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^0 = \infty$. Сонда Λ операторының меншікті мәндері келесі асимптотикалық өрнектермен сипатталады

$$\rho_s = \rho_s^0 + -\frac{\alpha_1(\rho_s^0)}{\rho_s^0} + o(\frac{1}{\rho_s^0}), \lambda_s = \rho_s^2,$$

мұндағы $\alpha_1(\rho_s^0)$ – шамасы $\rho_s^0 \to \infty$ жағдайында шектелген шама.

[5] жұмыста барлық потенциалдар $q_j(x_j) = 0,\ j = 1, \dots, m$ болғанда меншікті мәдердің асимптотикалық формулалары табылған. Теорема 1 [5] жұмыстың нәтижелерін айнымалы $q_j(x_j)$, $j = 1, \dots, m$ потенциалдар және граф доғаларының ұзындықтары бірдей болатын жағдайды жалпылайды.

1.6 Λ операторының меншікті функцияларының асимптотикалық формулалары

Осы бөлімде зерттелініп отырған операторды меншікті функцияларының асимптотикалық жіктелуін келтіретін боламыз. Ол үшін зерттелетін операторды меншікті мәндерінің асимптотикалық өрнектерін қолданамыз, өйткені меншікті функциялар меншікті мәндер арқылы өрнектеледі. Алдыңғы бөлімде жуықталған меншікті мәндер табылды, сондықтан енді меншікті функциялардың жуықталған құрылымы туралы сұрақты қарастыруға болады.

λ_s – берілген Λ операторының меншікті мәні болсын. λ_s меншікті мәніне сәйкес меншікті вектор-функция 1.2 бөлімінде алынғанын еске салайық. 1.2 бөліміндегі белгілеулер бойынша сәйкес меншікті вектор-функция $\{\kappa_1(x_1, \lambda_s), \dots, \kappa_m(x_m, \lambda_s)\}$ түрінде болады. $j = 1, \dots, m-1$ үшін функция

$$\kappa_j(x_j,\lambda_s)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m-1}\varphi_i(0,\lambda_s)\,\varphi_j(x_j,\lambda_s).$$

Ал $j=m$ үшін

$$\kappa_m(x_m,\lambda_s)=\prod_{i=1}^{m-1}\varphi_i(0,\lambda_s)\,c_m(x_m\lambda_s)+\kappa'_m(0,\lambda_s)s_m(x_m,\lambda_s),$$

мұндағы

$$\kappa'_m(0,\lambda_s)=-\sum_{i=1}^{m-1}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{m-1}\varphi_s(0,\lambda_s)\,\varphi'_i(0,\lambda_s)+\sum_{i=1}^{m-1}k_i\prod_{s=1}^{m}\varphi_s(0,\lambda_s).$$

Теорема 1.1 бойынша

$$\rho_s=\rho_s^0+-\frac{\alpha_1(\rho_s^0)}{\rho_s^0}+o(\frac{1}{\rho_s^0}),\lambda_s=\rho_s^2.$$

Сондықтан 1.4, 1.5, 1.6 леммаларын және Тейлор формуласын қолданып $\kappa_j(x_j,\lambda_s)$ меншікті функцияларының асимптотикасын жазуға болады. Аталған асимптотикасын жазу үшін бірқалыпты дифференциалдық теңдеудің шешімдерін спектрлік параметр бойынша экспоненциалдық қатарларды пайдаланамыз. Келесі пункте спектрлік параметр бойынша экспоненциалдық қатарлар туралы деректер келтірілген

1.7 Спектрлік параметр бойынша экспоненциалдық қатарлар

[49] жұмысында Штурм-Лиувилл операторының меншікті мәндерін сандық әдіспен анықтау үшін тиімді. Бұл жұмыста спектрлік параметр бойынша дәрежелік қатарларға жіктеу әдісі ұсынылды. Штурм-Лиувилл операторының меншікті мәндері $\Delta(\lambda)$ деп аталатын сипаттамалық анықтауыштың нөлдерін табуға келіп тіреледі. Штурм-Лиувилл операторының $\Delta(\lambda)$ сипаттамалық анықтауышы λ спектрлік параметріне қатысты бүтін функция болып табылады. Осылайша, $\Delta(\lambda)$ сипаттамалық анықтауышы λ спектрлік параметрі бойынша жинақталу радиусы шексіз дәрежелік қатарға жіктеледі. [49] жұмысында Тейлор коэффициенттерін табудың қарапайым әдісі көрсетілген. Анықталғандай, Тейлор коэффициенттерін анықтауға арналған рекуррентік формулалар меншікті мәндерді сандық есептеу үшін қарапайым әрі қуатты әдісті ұсынады. Дегенмен, бұл тәсіл салыстырмалы түрде кіші меншікті мәндерді есептеу үшін тиімді. Өте үлкен меншікті мәндер үшін [50-53] жұмысында ұсынылған әдіс толықтай тиімсіз емес, бірақ мұндай меншікті мәндерді табу үшін спектрлік параметр бойынша экспоненциалды қатарларды пайдаланған жөн. Біз ұсынып отырған экспоненциалды қатарлар шамасы бойынша айтарлықтай үлкен меншікті мәндерді есептеу үшін тиімді.

Сонымен қатар Марченко монографиясында [50] аталған теңдеулердің шешімдерін түрлендіру операторлар арқылы өрнектелген. Түрлендіру операторы шешімдерді экспонентік түрде өрнектейді.

Осылайша, ұсынылып отырған спекторалды параметрге тәуелді қатарлар Кравченко әдісінің рекурренттік-есептеу артықшылығын және Марченко теориясындағы экспоненциалды ұсынудың асимптотикалық тиімділігін бір арнаға тоғыстырады.

Бұл қосымшада айнымалы коэффициентті сызықтық екінші ретті дифференциалдық теңдеуге спектрлік параметр бойынша экспоненциалдық қатарлардың қолданамыз. Кесіндідегі екінші ретті сызықты жай дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x), \qquad 0 \le x \le 1.$$

Мұндай теңдеулер Штурм–Лиувилль теңдеуі деп аталады. $q(x)$ коэффициенті көбінесе потенциал деп аталады. Потенциал қанағаттандыратын шарттар зерттелетін мәселенің ерекшеліктеріне байланысты нақтыланады. λ комплекс саны спектралдық параметр рөлін атқарады.

Берілген теңдеудің жалпы шешімін төмендегі теорема арқылы анықтауға болады.

Теорема 1. Айталық, $q(x) \in C[0,1]$ және $R_n(x)$, $S_n(x,\tau)$ функциялары табылып, кез келген комплекс λ, фазалық түрлендірудегі $A = \sqrt{C_1^2 + C_1^2}$ тұрақты амплитудасы мен $\phi = arctg\frac{C_1}{C_2}$ фазасы үшін шешім

$$y(x,\lambda) = Asin(\lambda x + \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{\lambda^n} \left\{ R_n(x) cos\left[\lambda x + \phi - \frac{(n+1)\pi}{2}\right] + \int_0^x S_n(x,\tau) cos\left[\lambda(2\tau - x) + \phi - \frac{(n+1)\pi}{2}\right] d\tau \right\}$$

спектральдық параметр бойынша тригонометриялық қатарларға жіктеледі.

Дәлелдеу. Екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$y(x,\lambda) = C_1 cos\lambda x + C_2 sin\lambda x + \frac{1}{\lambda}\int_0^x q(t)y(t,\lambda) sin\lambda(x-t)dt.$$

Алынған интегралдық теңдеуді шешуде Пикар әдісін қолданамыз. Интегралдық теңдеуге сәйкес келетін біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімін нөлдік итерация ретінде

$$y_0(x,\lambda) = C_1 cos\lambda x + C_2 sin\lambda x.$$

деп белгілейміз. Алдағы есептеулерде ыңғайлы болу мақсатында $y_0(x,\lambda)$ өрнегіне

$$y_0(x,\lambda) = Asin(\lambda x + \phi)$$

фазалық түрлендіру жүргізейік. Мұндағы $A = \sqrt{C_1^2 + C_1^2},\ \phi = arctg\frac{C_1}{C_2}$. Осылайша, n-ші итерация

$$y_n(t_{n+1},\lambda) = \frac{A}{\lambda^n}\int_0^{t_{n+1}} dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1\, sin(\lambda t_1 + \phi)\prod_{i=1}^{n} sin\lambda(t_{i+1} - t_i)q(t_i).$$

n-еселі интегралмен анықталады. Мұнда $y_n(x,\lambda)$ дербес шешім үшін рекурренттік қатынасты ыңғайлы түрде алу үшін $x = t_{n+1}$ алмастыру қолданылды.

Гиперкуб төбелерінің координаталарын

$$I_n = \{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n): \sigma_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, n\}$$

арқылы белгілейік, онда

$$\prod_{i=0}^{n} sin\alpha_i = \frac{1}{2^n}\sum_{I_n}(-1)^{\sum_{s=1}^{n}\sigma_s} cos\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\sigma_i}\alpha_i - \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

теңдіктер ақиқат.

Көрсетілген формулалары жалпылама интегралдық теңдеулерді шешудегі тиімді құрал болып табылады, сонымен қатар олар математикалық дәлдікті сақтай отырып, оңтайлы нәтижелерге қол жеткізуге мүмкіндік береді. Осы тиімділікті көрсету үшін, Осы формуланы негізге ала отырып, $sin(\lambda t_1 + \phi)\cdot sin\lambda(t_2 - t_1)\cdot \dots \cdot sin\lambda(t_{n+1} - t_n)$ көбейтіндісін қосынды түріне түрлендіреміз:

$$y_n(t_{n+1},\lambda) = \frac{A}{(2\lambda)^n}\int_0^{t_{n+1}} dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \prod_{i=1}^{n} q(t_i)$$
$$\cdot \sum_{I_n}(-1)^{\sum_{s=1}^{n}\sigma_s} cos\left[\lambda\left(t_1 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\sigma_i}(t_{i+1} - t_i)\right) + \phi - \frac{(n+1)\pi}{2}\right].$$

Соңғы теңдіктегі тригонометриялық функциялардың аргументтерін түрлендіруді қарастырайық.

$$t_1 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\sigma_i}(t_{i+1} - t_i) = t_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{\sigma_i}(t_{i+1} - t_i)$$
$$= t_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}(1 + (-1)^{\sigma_i})(t_{i+1} - t_i) = t_{n+1} - 2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t_{i+1} - t_i),$$

Екі жағдай орын алады. Біріншісі – барлық $i = 0, \dots, n$ индекстері үшін $\sigma_i = 0$ болатын жағдай. Бұл жағдайда, алдыңғы түрлендіруге сәйкес, косинустың аргументі $t_{n+1} + \phi - \frac{(n+1)\pi}{2}$ мәніне ғана тең болады, яғни $t_1, \dots, t_n$ интегралдау айнымалыларынан тәуелсіз. Сондықтан, косинусты толығымен n-еселі интеграл белгісінің сыртына шығаруға болады.

Екіншісі – $i = 0, \dots, n$ индекстерінің арасында $\sigma_j \neq 0$ (яғни $\sigma_j = 1$) болатын кемінде бір j индексі табылатын жағдай. Мақсат спектр λ өзгеру сипатын анықтау болғандықтан, бұл жағдайда шешімнің осы параметрге тәуелділігін зерттеуге баса назар аудару қажет. Осы жүзеге асыру үшін, Фубини теоремасын қолдану мақсатында, келесі белгілеуді енгіземіз:

$$\tau = t_{n+1} - 2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t_{i+1} - t_i).$$

немесе

$$\tau = t_1 + \sum_{i=1}^{n}(1 - 2\sigma_i)(t_{i+1} - t_i),$$

Берілген $0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \le t_{n+1}$ теңсіздіктерімен анықталған симплекстік аймақты негізге ала отырып, сол симплекстің τ айнымалысына қатысты бір қимасын қарастырайық. Осы қиманың шекараларын талдау арқылы τ-дың жоғарғы және төменгі шектерін анықтаймыз:

$$\underbrace{min}_{\substack{0\le t_i\le t_{i+1}\\ \sigma_i\in\{0,1\}}} \tau = \underbrace{min}_{\substack{0\le t_i\le t_{i+1}\\ \sigma_i\in\{0,1\}}} \left\{t_1 + \sum_{i=1}^{n}(1 - 2\sigma_i)(t_{i+1} - t_i)\right\} = \underbrace{min}_{0\le t_i\le t_{i+1}} \left\{t_1 - \sum_{i=1}^{n}(t_{i+1} - t_i)\right\}$$
$$= \underbrace{min}_{0\le t_i\le t_{i+1}} \{2t_1 - t_{n+1}\} = -t_{n+1},$$
$$\underbrace{max}_{\substack{0\le t_{i+1}\le t_i\\ \sigma_i\in\{0,1\}}} \tau = \underbrace{max}_{\substack{0\le t_{i+1}\le t_i\\ \sigma_i\in\{0,1\}}} \left\{t_1 + \sum_{i=1}^{n}(1 - 2\sigma_i)(t_{i+1} - t_i)\right\} = \underbrace{max}_{0\le t_i\le t_{i+1}} \left\{t_1 + \sum_{i=1}^{n}(t_{i+1} - t_i)\right\}$$
$$= t_{n+1}.$$

Есептеуге ыңғайлы болу үшін интегралдау шектерін $-x \le \tau \le x$ аралығынан $0 \le \frac{\tau+x}{2} \le x$ түріне алмастырамыз. Сонда Фубини теоремасын негізге ала отырып, λ-ға тәуелді n-ші итерация келесі формуламен де жазуға болатыны шығады:

$$y_n(x,\lambda) = \frac{A}{\lambda^n}\left\{R_n(x)cos\left[\lambda x + \phi - \frac{(n+1)\pi}{2}\right] + \int_0^x S_n(x,\tau)cos\left[\lambda(2\tau - x) + \phi - \frac{(n+1)\pi}{2}\right]d\tau\right\},$$

мұндағы

$$R_n(x) = \frac{1}{2^n}\int_0^x dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \prod_{i=1}^{n} q(t_i),$$

$S_n(x,\tau)$ функциясына мысал

$$S_1(t_2,\tau) = -q\left(\frac{\tau+t_2}{2}\right),$$

$$S_2(t_3,\tau) = -q\left(\frac{\tau+t_3}{2}\right)\int_0^{\frac{\tau+t_3}{2}} q(t_1)dt_1 - \int_{\frac{-\tau+t_3}{2}}^{t_3} q\left(\frac{\tau+2t_2-t_3}{2}\right)q(t_2)dt_2 + $$

$$+q\left(\frac{\tau+t_3}{2}\right)\int_{\frac{\tau+t_3}{2}}^{t_3} q(t_2)dt_2,$$

$$S_3(t_4,\tau) = -q\left(\frac{\tau+t_4}{2}\right)\int_0^{\frac{\tau+t_4}{2}} q(t_2)dt_2\int_0^{t_2} q(t_1)dt_1 -$$

$$-\int_{\frac{-\tau+t_4}{2}}^{t_4} q\left(\frac{\tau+2t_3-t_4}{2}\right)q(t_3)dt_3\int_0^{\frac{\tau+2t_3-t_4}{2}} q(t_1)dt_1 +$$

$$+q\left(\frac{\tau+t_4}{2}\right)\int_{\frac{\tau+t_4}{2}}^{t_4} q(t_3)dt_3\int_0^{\frac{\tau+t_4}{2}} q(t_1)dt_1 +$$

$$+\int_{\frac{\tau+t_4}{2}}^{t_4} q(t_3)dt_3 \int_{\frac{-\tau+2t_3-t_4}{2}}^{t_3} q\left(\frac{\tau+2t_2-2t_3+t_4}{2}\right)q(t_2)dt_2 -$$

$$-\int_{\frac{-\tau+t_4}{2}}^{t_4} q(t_3)dt_3 \int_{\frac{-\tau+t_4}{2}}^{t_3} q\left(\frac{\tau+2t_2-t_4}{2}\right)q(t_2)dt_2 +$$

$$+\int_{\frac{-\tau+t_4}{2}}^{t_4} q\left(\frac{\tau+2t_3-t_4}{2}\right)q(t_3)dt_3 \int_{\frac{\tau+2t_3-t_4}{2}}^{t_3} q(t_2)dt_2 -$$

$$-q\left(\frac{\tau+t_4}{2}\right)\int_{\frac{\tau+t_4}{2}}^{t_4} q(t_3)dt_3 \int_{\frac{\tau+t_4}{2}}^{t_3} q(t_2)dt_2.$$

Көрсетілген тізбектердің басқа мүшелері үшін де сәйкес формулаларды жазуға болады. Алайда әртүрлі себептерге байланысты біз мұны жасамаймыз. $R_n(x)$ және $S_n(x,\tau)$ функциялары меншікті мән λ-дан тәуелсіз, яғни біздің негізгі мақсатымызға сәйкес λ мәнінің өзгеру процесіне тікелей ықпал етпейді. Сонымен, Пикар әдісі бойынша берілген екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі дербес шешімдерінің қосындылары түрінде жазылады. Осымен теорема дәлелденді.

Төмендегі бағалаулар тізбегі итерациялық жуықтаулар әдісінде $y(x)$-тің $x \in [0,1]$ аралығында шектелген екенін айқын көрсетеді.

Алдымен

$$|sin\lambda(x-t)| \leq 1$$

болғандықтан және $M := max_{t\in[0,1]}|q(t)|$ деп алып, бірінші жуықтау үшін

$$|y_1(x)| \leq \frac{1}{|\lambda|}\int_0^x |q(t)||sin\lambda(x-t)||y_0(x)|d\tau \leq \frac{1}{|\lambda|}\int_0^x |q(t)||y_0(x)|dt$$

$$\leq \frac{M}{|\lambda|}\int_0^x |y_0(x)|dt$$

теңсіздігін аламыз. Екінші жуықтау

$$|y_2(x)| \leq \frac{M}{|\lambda|}\int_0^x dt \int_0^x |y_0(x)|d\tau \leq \frac{M^2}{|\lambda|^2}\int_0^x |y_0(t)|\frac{(x-t)}{1!}dt,$$

Осы тәсілді қайталап қолдансақ, жалпы n-ші мүшеге

$$|y_n(x)| \le \frac{M^n}{|\lambda|^n}\int_0^x |y_0(t)|\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt.$$

бағалауы шығады.

Енді қатардың қалдығын $\varepsilon_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} y_n(x)$ деп белгілеп, жоғарыдағы бағалауды мүшелеп қосамыз:

$$|\varepsilon_N(x)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |y_n(x)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M^n}{|\lambda|^n}\int_0^x |y_0(t)|\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

Оң жақта интеграл ішіне жинақтасақ,

$$|\varepsilon_N(x)| \le \frac{M}{|\lambda|}\int_0^x |y_0(t)| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{M}{|\lambda|}(x-t)\right)^{n-1}}{(n-1)!}dt \le \frac{M}{|\lambda|}\int_0^x |y_0(t)| e^{\frac{M}{|\lambda|}(x-t)}dt.$$

Ал $0 \le x-t \le 1$ болғандықтан $e^{\frac{M}{|\lambda|}(x-t)} \le e^{\frac{M}{|\lambda|}}$

$$|\varepsilon_N(x)| \le \frac{Me^{\frac{M}{|\lambda|}}}{|\lambda|}\int_0^x |y_0(t)|dt < \infty.$$

Демек, қатардың қалдығы $[0,1]$ аралығында біркелкі шенеледі, сол арқылы $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ функциясы да $[0,1]$-де шектелген (және сәйкесінше қатар дұрыс жинақталады) екені қорытындыланады.

2 ГРАФ-ЖҰЛДЫЗДАҒЫ ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ СПЕКТРЛІК ТАЛДАУЫНЫҢ ІШІНАРА КЕРІ ЕСЕПТЕРІ

Диссертацияның осы бөлімінде граф-жұлдызда анықталған Штурм–Лиувилль операторының спектрлік талдауына қатысты ішінара кері есептердің кейбір мәселелері қарастырылды.

2.1 Спектрлік талдаудың ішінара кері есебі ретінде оператордың шекаралық шарттарын идентификациялау

Әрбір азамат он екі цифрдан тұратын жеке сәйкестендіру нөміріне ие, ол нақты бір жеке тұлғаны бірмәнді түрде анықтауға арналған. Бұл нөмір бойынша сәйкес жеке тұлғаның бар екендігі және оны бірмәнді түрде табуға болатындығы ұйғарылады. Мұндай есеп жеке тұлғаны идентификациялау есебі деп аталады.

Осы ұқсастыққа сүйене отырып, спектрлік талдаудың ішінара кері есептерінде берілген спектрлік сипаттамалар арқылы оператордың белгісіз параметрлерін, соның ішінде шекаралық шарттарын бірмәнді түрде қалпына келтіру мәселесі қарастырылады.

Диссертациялық жұмыста «физикалық тұлғалар» ретінде граф-жұлдыздағы Штурм–Лиувилль операторлары қарастырылады. $j = 1, \dots, m$ үшін $q_j(x_j) \in L_2(0, b_j)$ нақты потенциалдары алдын ала берілген деп ұйғарылады. Ең аз дегенде қандай ақпарат бойынша граф-жұлдыздағы Штурм–Лиувилль операторын бірмәнді қалпына келтіру болады? Нақтырақ айтқанда, шекаралық шарттар және ішкі төбедегі үйлесімділік шарттарын бірмәнді анықтау қашан мүмкін болады? Бұл есеп граф-жұлдыздағы Штурм–Лиувилль операторының спектралдық талдауының ішінара кері есебі болып табылады. Екінші жағынан, бұл есеп граф-жұлдыздағы Штурм–Лиувилль операторын идентификациялау есебі болып саналады. Граф-жұлдыздағы Штурм–Лиувилль операторын бірмәнді қалпына келтіруге мүмкіндік беретін ақпарат физикалық тұлғаның жеке сәйкестендіру нөмірінің рөлін атқарады.

Осыған байланысты мынадай мәселе туындайды: граф-жұлдызда анықталған Штурм–Лиувилль операторы туралы қандай ең аз ақпарат негізінде ізделінетін операторды бірмәнді түрде қалпына келтіруге болады?

Қалпына келтірілетін оператор туралы қосымша ақпарат, әдетте, жанама инженерлік әдістер арқылы бақыланады (өлшенеді). Көбінесе бұл мақсатта акустикалық диагностика әдістері қолданылады. Ауада таралатын серпімді механикалық тербелістер, әдетте, дыбыс ретінде қабылданады. Адамның есту мүшесі 16 Гц-тен 20 кГц-ке дейінгі жиілік диапазонындағы акустикалық тербелістерді ажырата алады. Ал жиілігі 20 кГц-тен асатын тербелістер ультрадыбыстық тербелістер деп аталады. Қазіргі уақытта дыбыстық толқындардың меншікті жиіліктерін өлшеуге мүмкіндік беретін заманауи

техникалық құралдар бар. Меншікті жиіліктер қалпына келтірілетін операторды меншікті мәндерімен тығыз байланысты. Сондықтан қосымша ақпарат ретінде операторды белгілі бір меншікті мәндерінің жиыны беріледі деп есептейміз. Демек, бізге алдын - ала қалпына келтірілетін операторды меншікті мәндерінің белгілі бір саны берілген болады. Осы жағдайда идентификациялау есебі келесі сұрақтарға жауап беруге келіп тіреледі: қалпына келтірілетін операторды қанша және қандай меншікті мәндері бойынша граф-жұлдыздағы Штурм–Лиувилль операторын бірмәнді түрде қалпына келтіруге болады?

2.2 Қаттылық коэффициентін идентификациялау

$m+1$ төбесі және m қабырғасы бар граф-жұлдыз берілсін. Граф-жұлдызды $\Gamma = \{V, E\}$ арқылы белгілейік. Графтың шекаралық төбелерін 1-ден m-ге дейін нөмірлейміз, ал $(m+1)$ ішкі төбенің нөмірі. Қабырғалардың ұзындықтарын $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$, ал қабырғалардың өздерін $e_1, \dots, e_m$. арқылы белгілейміз. $b_1, \dots, b_m$ сандары 1.2-параграфтың 1-талабына сәйкес таңдалып алынған. Γ граф-жұлдызының әрбір e_j қабырғасында келесі теңдеу орындалсын:

$$l_j(y_j) = -y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in e_j = (0, b_j),$$

$$j = 1, \dots, m, \tag{2.2.1}$$

және ол келесі шекаралық шарттарды

$$y_j'(b_j) - h_j y_j(b_j) = 0, \ \ j = 1, \dots, m, \tag{2.2.2}$$

сондай ақ ішкі төбеде мына үйлесімділік шарттарын

$$y_1(0) = y_2(0) = \cdots = y_m(0), \tag{2.2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left(y_j'(0) - k_j y_j(0) \right) = 0 \tag{2.2.4}$$

қанағаттандыратын болсын.

Ары қарай $q_j(x_j) \in L_2(0, b_j)$ деп ұйғарайық. Бұдан бөлек, h_j және k_j сандары нақты, ал $q_j(x_j)$ функциялары нақты мәнді функциялар болып табылады.

(2.2.2) шекаралық шарттарын, сондай-ақ (2.2.3) және (2.2.4) үйлесімділік шарттарын қанағаттандыратын тегіс функциялар жиынында анықталған $(l_1(\cdot), \dots, l_m(\cdot))$ өрнектері арқылы берілген операторды $\Lambda(K)$ арқылы белгілейік, мұндағы $K = \sum_{i=1}^{m} k_i$. Ал $W_2^2(\Gamma)$ кеңістігінде

анықталған $\left(l_1(\cdot), \dots, l_m(\cdot)\right)$ өрнектер жиынымен берілген операторды Λ_{max} деп белгілейміз.

Осы жұмыстың негізгі нәтижелерін тұжырымдау үшін келесі белгілеулерді енгіземіз. Әрі қарай $q_1(\cdot), \dots, q_m(\cdot)$ функциялары мен $h_1, \dots, h_m$ сандары тұрақты деп есептеледі. Сонымен қатар $k_1, \dots, k_m$ сандары өзгеріп отыра алады. Ал, $\Lambda(K)$ операторының сипаттамалық анықтауышын $\Delta(\lambda; K)$ арқылы белгілейміз.

1-талап орындалсын деп алайық: $b_1, \dots, b_m$ оң сандары $i \neq j$ болғанда, L_i және L_j операторларының ортақ меншікті мәндері болмайтындай етіп таңдалып алынады.

L_i операторлары келесі түрде енгізіледі. $\mathrm{i}= 1, \dots, m$ үшін $[0, b_i]$ кесінділерінде анықталу облыстары

$$D(L_i) = \{y \in W_2^2[0, b_i]: y(0) = 0,\ y'(b_i) - h_i y(b_i) = 0\}$$

болатын

$$L_i y(x) = -y''(x) + q_i(x)y(x), \quad x \in (0, b_i)$$

Штурм–Лиувилль операторларын енгізейік.

$j = 1, \dots, m-1$ үшін $l_j(\varphi_j) = \lambda\varphi_j,\ x_j \epsilon e_j = (0, b_j)$ дифференциалдық теңдеулерінің $x_j = b_j$ нүктесіндегі Коши шарттарын

$$\varphi_j(b_j) = 1, \qquad \varphi_j'(b_j) = h_j.$$

қанағаттандыратын $\varphi_j(x, \lambda)$ шешімдерін қарастырайық.

Айта кетейік, бекітілген $x_j \in e_j$ үшін $\varphi_j(x_j, \lambda)$ функциялары λ айнымалысына қатысты бүтін функциялар болып табылады.

Ескерту 1. $j = 1,2, \dots, m-1$ болғанда $\varphi_j(0, \lambda)$ шамалары параметр λ -ның ешбір кешенді мәнінде бір мезгілде нөлге айнала алмайды. Бұл $b_1, \dots, b_m$ сандарының 1-талапқа сәйкес арнайы түрде таңдалып алынғандығынан шығады. Шынында да, егер параметр λ -ның қандай да бір кешенді мәні үшін $\varphi_i(0, \lambda) = \varphi_j(0, \lambda)$=0 болатын i және i j индекстері бар деп ұйғарсақ, онда λ L_i және L_j операторларының меншікті мәні болады. Ал бұл факт 1-талапқа қайшы келеді.

$x \epsilon e_j$ үшін $\psi_j(x, \lambda) = B_j\varphi_j(x, \lambda)$ функциялар жүйесін енгіземіз. $B_1, \dots, B_{m-1}$ сандары

$$\{\psi_1(x_1, \lambda), \dots, \psi_{m-1}(x_m, \lambda)\}$$

функциялар жүйесі (3) шартты қанағаттандыратындай етіп таңдап алынды. $B_1, \dots, B_{m-1}$ сандарын келесідей түрде таңдап аламыз:

$$B_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m-1} \varphi_i(0,\lambda),\ j = 1,\dots,m-1.$$

Осындай таңдау кезінде $\psi_1(0,\lambda) = \psi_2(0,\lambda) = \cdots = \psi_{m-1}(0,\lambda) = \prod_{i=1}^{m-1} \varphi_i(0,\lambda)$.

$x_m \in (0, b_m)$ үшін $l_m(\psi_m) = \lambda\psi_m$ біртекті теңдеуінің $\psi_m(0,\lambda) = \prod_{i=1}^{m-1} \varphi_i(0,\lambda)$ шарттарына, сондай – ақ төмендегі талапқа

$$\psi_m'(0,\lambda) - k_m\psi_m(0,\lambda) = -\sum_{i=1}^{m-1}\left(\psi_i'(0,\lambda) - k_i\psi_i(0,\lambda)\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m-1}\left(\prod_{\substack{s=1 \\ s\neq i}}^{m-1} \varphi_s(0,\lambda)\,\varphi_i'(0,\lambda) - k_i\prod_{s=1}^{m-1}\varphi_s(0,\lambda)\right)$$

бағынатын шешімін $\psi_m(x_m,\lambda)$ арқылы белгілейік.

Бұдан төмендегі теңдік шығады:

$$\psi_m'(0,\lambda) = -\sum_{i=1}^{m-1}\prod_{\substack{s=1 \\ s\neq i}}^{m-1} \varphi_s(0,\lambda)\,\varphi_i'(0,\lambda) + K\prod_{s=1}^{m-1}\varphi_s(0,\lambda).$$

$l_m(\psi_m) = \lambda\psi_m(x_m,\lambda)$, $x_m \in e_m = (0, b_m)$ болса, онда келесі өрнек шығады

$$\psi_m(x_m,\lambda) = \psi_m(0,\lambda)c_m(x_m,\lambda) + \psi_m'(0,\lambda)s_m(x_m,\lambda), \qquad x_m \in e_m.$$

Мұндағы $c_m(x_m,\lambda)$ және $s_m(x_m,\lambda)$ функциялары $x_m \in e_m$ үшін, $l_m(y_m) = \lambda y_m(x_m)$ біртекті теңдеуінің $x_m = 0$ нүктесіндегі

$$s_m(0,\lambda) = c_m'(0,\lambda) = 0, \quad s_m'(0,\lambda) = c_m(0,\lambda) = 1$$

Коши шарттарына бағынатын фундаментал шешімдер жүйесін құрайды.

Айта кетейік, бекітілген $x_m \in (0, b_m)$ үшін $\psi_m(x_m,\lambda)$ функциясы λ айнымалысына қатысты бүтін функция болып табылады.

Идентификация есебін шешу барысында маңызды болып табылатын негізгі нәтижелерді тұжырымдайық.

Теорема 2.2. $h_1,\dots,h_m$ нақты сандар болсын, ал $q_1(\cdot),\dots,q_m(\cdot)$ функциялары $(0,b_1),\dots,(0,b_m)$ аралықтарында анықталған, нақты мәнді, квадрат бойынша жинақталатын функциялардың белгілі бір жиыны болсын. $b_1,\dots,b_m$ сандары $i \neq j$ болғанда L_i және L_j операторларының спектрлері қиылыспайтындай етіп таңдап алынсын. $L_1,\dots,L_m$ операторлары (1) және (2) қатынастарымен берілсін. Егер $k_1,\dots,k_m$ нақты сандардың еркін жиыны болса, онда төмендегілер орындалады:

1. $\Lambda(K)$ операторың сипаттамалық анықтауышы $\Delta(\lambda; K)$ келесі формуламен анықталады:

$$\Delta(\lambda; K) = \psi'_m(b_m, \lambda) - h_m\psi_m(b_m, \lambda);$$

2. $\Delta(\lambda; K)$ сипаттамалық анықтауышы λ айнымалылы функция ретінде тек қана қарапайым нөлдерге ие;

3. $\Lambda(K)$операторының спектрі тек меншікті мәндерден тұрады және олар $\Delta(\lambda; K)$ сипаттамалық анықтауышының нөлдері болып табылады. Бұл ретте нөлдің еселігі меншікті мәннің алгебралық еселігімен сәйкес келеді және бірге тең;

4. $\Lambda(K)$ операторының λ_0 меншікті мәніне сәйкес келетін меншікті функциясы $\{\psi_1(x_1, \lambda_0), \psi_2(x_2, \lambda_0), \dots, \psi_m(x_m, \lambda_0)\}$ түрінде беріледі;

5. $\Lambda(K)$- операторының барлық меншікті мәндері нақты сандар болып табылады;

6. $\Lambda(K)$ операторының меншікті функциялар жүйесі L_2(Г) кеңістігінде ортогонал базис құрайды.

$\Lambda(K)$ операторының меншікті мәндерінің қарапайымдылығы 1.3-параграфта дәлелденген. Қалған тұжырымдар не айқын түрде орындалады, не болмаса $\Lambda(K)$ операторының өзіне-өзі түйіндес болу қасиетінен тікелей шығады.

$\Lambda(K)$ операторының меншікті мәндерінің асимптотикасы 1.5-параграфтың 1-теоремасында келтірілген.

$b_1 = \cdots = b_m$, болған жағдайда графтарда анықталған Штурм–Лиувилль операторының меншікті мәндерінің асимптотикалық формулаларын [36, 56] жұмыстарынан табуға болады.

Енді идентификациялау есебіне көшейік: $\Lambda(K)$ операторының берілген λ_0 меншікті мәні бойынша К коэффициентін бірмәнді түрде қалпына келтіру талап етіледі.

Теорема 2.3. Теорема 2-нің шарттары орындалсын. Онда $\Lambda(K)$ операторының еркін таңдап алынған бір ғана меншікті мәні λ_0 бойынша K коэффициенті бірмәнді түрде анықталады. Сонымен қатар, келесі формула орындалады:

$$K = -\frac{\Delta(\lambda_0, 0)}{\prod_{i=1}^{m-1}\varphi_i(0, \lambda_0)(S'_m(b_m, \lambda_0) - h_m S_m(b_m, \lambda_0)},$$

мұндағы $\Delta(\lambda_0, 0)$ дегеніміз $K = 0$ жағдайындағы $\Lambda(K)$ операторының сипаттамалық анықтауышы.

Теорема 2.3-тің дәлелдеуі. λ_0 ол $\Lambda(K)$ операторының меншікті мәні болсын. Онда $\Delta(\lambda_0, K) = \psi'_m(b_m, \lambda_0) - h_m\psi_m(b_m, \lambda_0) = 0$. Келесі формулаларды еске алайық:

$$\psi'_m(0,\lambda_0) = \prod_{i=1}^{m-1} \varphi_i(0,\lambda_0)$$

$$\psi'_m(0,\lambda_0) = -\sum_{i=1}^{m-1} \prod_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{m-1} \varphi_j(0,\lambda_0)\varphi'_i(0,\lambda_0) + K\prod_{i=1}^{m-1} \varphi_i(0,\lambda_0),$$

$$\psi_m(x_m,\lambda_0) = \psi_m(0,\lambda_0)C_m(x_m,\lambda_0) + \psi'_m(0,\lambda_0)S_m(x_m,\lambda_0), x_m \in l_m.$$

Осыдан белгісіз K коэффициентіне қатысты теңдеу аламыз: $K\prod_{i=1}^{m-1}\varphi_i(0,\lambda_0)(S'_m(b_m,\lambda_0) - h_m S_m(b_m,\lambda_0)) = -\Delta(\lambda_0,0)$.

1-талаптан $\varphi_i(0,\lambda_0) \neq 0, \quad i = 1,\dots,m-1$ екендігі шығады. Енді $S'_m(b_m,\lambda_0) - h_m S_m(b_m,\lambda_0) \neq 0$ екенін көрсетейік. Керісінше, келесі теңдік орындалады деп ұйғарайық:

$$S'_m(b_m,\lambda_0) - h_m S_m(b_m,\lambda_0) = 0.$$

$S_m(0,\lambda_0) = 0,$ болғандықтан, λ_0 саны L_m операторының меншікті мәні болып табылады деген қорытынды жасаймыз. 1-талапқа сәйкес, L_m және $\Lambda(K)$ операторларының ортақ меншікті мәндері болмайды. Сондықтан келесі теңсіздік орындалады:

$$S'_m(b_m,\lambda_0) - h_m S_m(b_m,\lambda_0) \neq 0.$$

Осыдан теорема 2.3-тің тұжырымы шығады. Айта кетейік, біздің пайымдауларымызда меншікті мән λ_0-ге ешқандай шектеулер қойылмайды. Басқаша айтқанда, теорема 2.3-тің тұжырымы λ_0-дің кез келген меншікті мәні үшін дұрыс. Теорема 2.3 толық дәлелденді.

2.3 Бейлокал үйлесімділік шарттарын айқындау

2.1 тармақтағы белгілеулерді сақтаймыз. (2.2.4) үйлесімділік шартын төмендегі көп нүктелі үйлесімділік шартына ауыстырамыз:

$$y'_m(0) + \sum_{j=1}^{m-1}\left(y'_j(0) - \sum_{i=1}^{n_j}\alpha_{ji}\, y_j(\beta_{ji})\right) = 0 \qquad (2.3.1)$$

Мұндағы $0 = \beta_{j1} < \beta_{j2} < \dots < \beta_{jn_j} \leq b_j$ шамалары e_j қабырғасында орналасқан. α_{ji} сандары комлексті мәндер қабылдауы мүмкін. $\left(l_1(\cdot),\dots,l_m(\cdot)\right)$ өрнектері арқылы берілген және тегіс функцияларда анықталған, сонымен қатар (2.2.2) шекаралық шарттарға, (2.2.3) және (2.3.1) үйлесімділік шарттарына сай келетін операторды $\Lambda(\alpha)$ деп белгілейміз. Бұдан әрі осы тармақта

$q_1(\cdot),\dots,q_m(\cdot)$ функциялары және $h_1,\dots,h_m$ сандары бекітілген. Сондай-ақ, $\{\beta_{ji}\}$ нүктелері де бекітілген. Ал $\{\alpha_{ji}\}$ сандары өзгеруі мүмкін. Оператор $\Lambda(\alpha)$-ның сипаттамалық анықтауышын $\Delta(\lambda,\alpha)$ деп белгілейміз. $\psi_1(x_1,\lambda),\dots,\psi_{m-1}(x_{m-1},\lambda)$ функциялары 2.1 тармақта енгізілген. $x_m \in (0,b_m)$ үшін $l_m(\psi_m)=\lambda\psi_m$ біртекті теңдеудің шешімін $\psi_m(x_m,\lambda)$ арқылы белгілейік, және ол мына шарттарға бағынады:

$$\psi_m(0,\lambda)=\prod_{i=1}^{m-1}\varphi_i(0,\lambda),$$

$$\psi'_m(0,\lambda)=-\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{i=1}^{m-1}\varphi_i(0,\lambda)\,\varphi'_j(0,\lambda)+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n_j}\alpha_{ji}\cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m-1}\varphi_k(0,\lambda)\varphi_j(\beta_{ji}).$$

$l_m(\psi_m)=\lambda\psi_m$, $x_m\in l_m=(0,b_m)$ болғандықтан, онда

$$\psi_m(x,\lambda)=\psi_m(0,\lambda)c_m(x_m,\lambda)+\psi'_m(0,\lambda)s_m(x_m,\lambda).$$

Мұндағы $c_m(x_m,\lambda)$ және $s_m(x_m,\lambda)$ функциялары 2.1 тармақта енгізілген. Енді идентификация мәселесін шешу кезінде маңызды нәтижелерді тұжырымдайық.

Лемма 2.1. Оператор $\Lambda(\alpha)$-ның сипаттамалық анықтауышы $\Delta(\lambda,\alpha)$ келесі формуламен беріледі:

$$\Delta(\lambda,\alpha)=\psi'_m(b_m,\lambda)-h_m\psi_m(b_m,\lambda)=\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m-1}\varphi_k(0,\lambda)\sum_{i=1}^{n_j}\alpha_{ji}\varphi_j(\beta_{ji})\left(s'_m(b_m,\lambda)-h_m s_m(b_m,\lambda)\right)+\Delta(\lambda,0),$$

мұндағы $\Delta(\lambda,0)$— оператор $\Lambda(k)$ –ның $k=0$ үшін сипаттамалық анықтауышы, ол 2.1 тармақта енгізілген.

Ең алдымен, келесі жағдайды қарастырайық: $j>2, i>2$ үшін $\alpha_{ji}=0,$ ал $i=1,\dots,m-1$үшін α_{1i} және α_{i1} кез келген сандар,
Сонда

$$\Delta(\lambda,\alpha)=\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_{j1}\prod_{k=1}^{m-1}\varphi_k(0,\lambda)\left(s'_m(b_m,\lambda)-h_m s_m(b_m,\lambda)\right)+\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_{1i}\,\varphi_1(\beta_{1i})\prod_{k=2}^{m-1}\varphi_k(0,\lambda)\left(s'_m(b_m,\lambda)-h_m s_m(b_m,\lambda)\right)+\Delta(\lambda,0).$$

$\alpha_{10}=\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_{j1}$ белгілеуін енгізейік. Сонда

$$\Delta(\lambda,\alpha)-\Delta(\lambda,0)=\left[\alpha_{10}\varphi_1(0,\lambda)+\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_{1i}\,\varphi_1(\beta_{1i})\right]\prod_{k=2}^{m-1}\varphi_k(0,\lambda)\left(s'_m(b_m,\lambda)-h_m s_m(b_m,\lambda)\right).$$

2.1 тармағының 1-шарттары орындалғанда, $\varphi_k(0,\lambda) \neq 0, s'_m(b_m,\lambda) - h_m s_m(b_m,\lambda) \neq 0$ екенін дәлелденді, мұндағы λ — $\Lambda(\alpha)$ операторының жеке мәні.

Сондай-ақ, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1+1}$ оператор $\Lambda(\alpha)$-ның жеке мәндері деп алайық. Сонда белгісіз параметрлер $\alpha_{10}, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{n,1}$ бойынша сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

$$\Phi\left(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}\right)\begin{bmatrix}\alpha_{10}\\ \alpha_{11}\\ .\\ .\\ .\\ \alpha_{n_1 1}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\dfrac{\Delta(\lambda_0,0)}{\xi_0}\\ \dfrac{\Delta(\lambda_1,0)}{\xi_1}\\ .\\ .\\ .\\ \dfrac{\Delta\left(\lambda_{n_1},0\right)}{\xi_{n_1}}\end{bmatrix},$$

мұндағы $\xi_\theta = \prod_{k=2}^{m-1}\varphi_k(0,\lambda_\theta)\left(s'_m(b_m,\lambda_\theta) - h_m s_m(b_m,\lambda_\theta)\right)$, $\theta = 0,1,\ldots,n_1$. Φ матрицасы төмендегі түрде болады

$$\Phi\left(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}\right) = \begin{bmatrix}\varphi_1(0,\lambda_0) & \varphi_1(\beta_{11},\lambda_0) & \ldots & \varphi_1\left(\beta_{1n_1},\lambda_0\right)\\ \varphi_1(0,\lambda_1) & \varphi_1(\beta_{11},\lambda_1) & \ldots & \varphi_1\left(\beta_{1n_1},\lambda_1\right)\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ \varphi_1\left(0,\lambda_{n_1}\right) & \varphi_1\left(\beta_{11},\lambda_{n_1}\right) & \ldots & \varphi_1\left(\beta_{1n_1},\lambda_{n_1}\right)\end{bmatrix}.$$

Теорема 2.4. Айталық, 1-шарт орындалған болсын. $\alpha_{ji} = 0$, $i,j > 2$ болған жағдайда, $\Lambda(\alpha)$ арқылы (2.2.1),(2.2.2),(2.2.3),(2.31) есептеріне сәйкес операторды белгілейік. Сондай-ақ, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}$ жеке мәндері төмендегідей таңдалсын

$$det\,\Phi\left(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}\right) \neq 0.$$

Сонда, үйлесімділік шарты (2.3.1)-дегі коэффициенттер $\alpha_{10}, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{n,1}$ оператор $\Lambda(\alpha)$-ның жеке мәндерінің шектеулі жиыны $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}$ арқылы бірмәнді қалпына келтіріледі. Сонымен қатар, мына формула орынды

$$\begin{bmatrix}\alpha_{10}\\ \alpha_{11}\\ \vdots\\ \alpha_{n_1}\end{bmatrix} = -\Phi^{-1}\left(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n_1}\right)\begin{bmatrix}\frac{\Delta(\lambda_0,0)}{\xi_0}\\ \frac{\Delta(\lambda_1,0)}{\xi_1}\\ .\\ .\\ .\\ \frac{\Delta\left(\lambda_{n_1},0\right)}{\xi_{n_1}}\end{bmatrix}.$$

Осылайша, теорема 2.4 бойынша, белгілі жеке мәндер жиыны арқылы e_1 қабырғасына қатысты белгісіз коэффициенттерді қалпына келтіру алгоритмі берілген.

Егер e_1 қабырғасына қатысты коэффициенттер белгілі деп есептесек, онда e_2 қабырғасына қатысты белгісіз коэффициенттерді де бірмәнді анықтауға болады. Ұсынылған есептеу процесін жалғастыра отырып, $\left(\alpha_{ji}\right)$ барлық коэффициенттерді байланысты операторлардың белгілі жеке мәндерінің шектеулі жиыны арқылы бірмәнді қалпына келтіруге болады.

2.4 Шекаралық шарттарды идентификациялау есептері

Осы тармақта да 2.2 тармағында енгізілген белгілеулер де сақталады. Мақсат – дифференциалдық оператор Λ -ның жеке мәндері бойынша шекаралық шарттарға кіретін коэффициенттерді бірмәнді қалпына келтіру мәселесін қою. $\left(l_1(\cdot),\ldots,l_m(\cdot)\right)$ өрнектері арқылы берілетін және тегіс функцияларда анықталған, сонымен қатар (2.2.2) шекаралық шарттарға және (2.2.3), (2.2.4) үйлесімділік шарттарына сай келетін операторды $\Lambda(H)$ деп белгілейміз, мұндағы $H = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$. Бұл тармақта $\Lambda(H)$ операторының шекаралық параметрлерге тәуелділігі $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ арқылы қарастырылады. Бұл тармақтағы $q_1(\cdot),\ldots,q_m(\cdot)$ функциялары және $k_1,\ldots,k_m$ сандары бекітілген. Ал $h_1, h_2, \ldots, h_m$ сандары өзгеруі мүмкін. Оператор $\Lambda(H)$-ның сипаттамалық анықтауышын $\Delta(\lambda, H)$ деп белгілейміз:

$$\Delta(\lambda, H) = \psi_m^{'}(b_m, \lambda) - h_m\psi_m(b_m, \lambda).$$

Енді екінші $\widetilde{H} = (h_1,\ldots,h_{s-1},0,h_{s+1},\ldots,h_m)$ жиынтығын алайық, мұндағы $h_s = 0$. $\psi_1(x_1,\lambda),\ldots,\psi_m(x_m,\lambda)$ функциялары H жиынына сәйкес келеді. Сол сияқты, $\widetilde{H}$ жиынына сәйкес келетін функцияларды $\tilde{\psi}_1(x_1,\lambda),\ldots,\tilde{\psi}_m(x_m,\lambda)$ деп белгілейміз. Сонда $\Delta\left(\lambda,\widetilde{H}\right) = \tilde{\psi}_m'(b_m,\lambda) - h_m\tilde{\psi}_m(b_m,\lambda)$. 1.4 тармағының 2-леммасына сәйкес келесі теңдік орындалады:

$$\Delta(\lambda,H)\overline{\tilde{\psi}_m(b_m,\overline{\lambda})}=\psi_m(b_m,\lambda)\overline{\Delta\left(\overline{\lambda},\widetilde{H}\right)}+\psi_s(b_s,\lambda)\left(\overline{\tilde{\psi}_s^{(1)}(b_s,\overline{\lambda})-h_s\tilde{\psi}_s(b_s,\overline{\lambda})}\right).$$

Айталық, λ_0 — оператор $\Lambda(H)$-ның жеке мәні. Сонда келесі теңдік орындалады:

$$\psi_m(b_m,\lambda_0)\overline{\Delta\left(\overline{\lambda_0},\widetilde{H}\right)}+\psi_s(b_m,\lambda_0)\overline{\tilde{\psi}_s^{(1)}(b_s,\overline{\lambda}_0)}=h_s\psi_s(b_s,\lambda_0)\overline{\tilde{\psi}_s\ (b_s,\overline{\lambda}_0)}.$$

$\tilde{\psi}_s(b_s,\lambda)=\psi_s(b_s,\lambda)=\prod_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{m-1}\varphi_i(0,\lambda)\,\varphi_s(b_s,\lambda)=\prod_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{m-1}\varphi_i(0,\lambda)$ болғандықтан, $\psi_s(b_s,\lambda_0)\,\widetilde{\psi}_s\left(b_s,\overline{\lambda_0}\right)\neq 0$. Бұл теңсіздік 1-шарттың орындалатынынан шығады. Осылайша, келесі тұжырым дұрыс:

Теорема 2.5. Айталық, теорема 2 шарттары орындалсын. Сонда оператор $\Lambda(H)$-ның кез келген таңдалған жеке мәні λ_0 бойынша шекаралық коэффициент h_s бірмәнді анықталады, егер қалған шекаралық коэффициенттер $h_1,\ldots,h_{s-1},h_{s+1},\ldots,h_m$ белгілі болса. Сонымен қатар төмендегі формула орындалады

$$h_s=\frac{\psi_m(b_m,\lambda_0)\overline{\Delta\left(\overline{\lambda_0},\widetilde{H}\right)}+\psi_s(b_s,\lambda_0)\overline{\tilde{\psi}_s^{(1)}\left(b_s,\overline{\lambda_0}\right)}}{\left(\psi_s(b_s,\lambda_0)\right)^2}.$$

Осылайша, теорема 2.5 бойынша, оператор $\Lambda(H)$-ның бір жеке мәні λ_0 арқылы белгісіз шекаралық коэффициент h_s-ті қалпына келтіру алгоритмі берілген, егер қалған шекаралық коэффициенттер белгілі болса. Осы алгоритмді ретті түрде қолдана отырып, барлық коэффициенттерді $h_1,h_2,\ldots,h_m$ бірмәнді қалпына келтіруге болады.

3 ГРАФ-АҒАШТАҒЫ ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ СПЕКТРЛІК ТАЛДАУЫНЫҢ ТУРА ЕСЕПТЕРІ

Диссертацияның бұл бөлімінде граф- ағаштағы Штурм-Лиувилль операторының спектрлік талдауындағы тура есептерге қатысты кейбір мәселелер қарастырылды.

3.1Граф -ағашқа байланысты анықтамалар және түсініктер

Кейбір графтардың атаулары олардың диаграммалары мен байланысты. Оған мысал ретінде «граф-ағашты» атауымызға болады. Формалды түрде, циклдері жоқ байланысқан графтарды ағаш деп атайды. Циклі жоқ граф цикілдік емес граф немесе орман деп аталады. Осылайша, ормандардың әрбір компоненті ағаш болып табылады. Орман тек бір ағаштан тұруы да мүмкін! Басқаша айтқанда, ағаш — байланысқан граф. Байланысқан графта кез келген әртүрлі төбесі кем дегенде бір жолмен қосылған болады. Ағаштар — әрбір әртүрлі екі төбесі тек бір жолмен қосылатын қарапайым байланысқан графтар. [54-56]. Графтарға қатысты келесі тұжырымдарды келтірейік.

Тұжырым 3.1. Қарапайым граф сонда және тек сонда егер кез келген екі түрлі төбесі бірғана жолмен қосылған болса ғана ағаш болып табылады [48].

Тұжырым 3.2. n төбелері бар ағаштың қабырғаларының саны (n-1) ге тең. Және керісінше, n төбесі және n-1 қабырғалары бар байланысқан граф ағаш болады [48].

Тұжырым 3.3. Кем дегенде екі төбесі бар байланысқан G графы ағаш болады, сонда және тек қана сонда, егер оның төбелерінің дәрежелері тізбегі $(d_1, \dots, d_n)$ келесі теңдікті қанағаттандырса $\sum_{i=1}^{n} d_i$ =2(n-1) [48].

Ағашта ішінара тәртіп енгізіледі: ағашқа тиісті x, y нүктелері үшін, $x \preccurlyeq y$ деп жазамыз, егер x ағаштың тамырынан y нүктесіне апаратын жалғыз қарапайым жолда жатса. Жолдың ұзындығы $|y|$ арқылы белгіленеді.

Енді

$$\langle y|z\rangle = \{x: y \preccurlyeq x \preccurlyeq z\}$$

болсын.

Онда $e = \langle y|z\rangle$ қабырғасының бастапқы төбесі y, ал соңғысы z болады. Ағаштардағы дифференциалдық операторлар [46, 47] жұмыстарында енгізілген.

3.2 Граф-ағаштағы Штурм-Лиувилль операторы

Графтардағы дифференциалдық операторлар ақырлы кесіндідегі дифференциалдық операторлардан айтарлықтай ерекшеленеді. Егер графтың

доғаларының ұзындықтары бірдей болса, онда мұндай графтағы дифференциалдық оператордың меншікті мәндерінің еселігін зерттеу барысында мәселелер туындайды. Дербес жағдайда, жекелеген доғаларда нөлге айналатын тосын меншікті функциялар пайда болуы мүмкін. Алайда жалпы алғанда графта меншікті функция тепе тең нөлден өзгеше. Жұмысымыздың бұл бөлімінде аталмыш мұндай ерекшеліктер байқалмайтын граф-ағаштардың бір түрі бөлініп көрсетілген. Мұндай графтағы дифференциалдық оператордың әрбір меншікті функциясы жекелеген доғаларда тепе тең нөлден өзгеше функциялардан тұрады.

Бұл бөлімде ағаш-графта анықталған дифференциалдық теңдеулер қарастырылады. $\Gamma = \{V, E\}$ арқылы граф-ағашты белгілейік. Төбелер жиынын екі қиылыспайтын бөлікке бөлеміз:

$$V = V_1 \cup V_2.$$

V_1 -ге тиесілі төбелерді шекаралық төбелер деп атаймыз және оларды 0-ден p -ға дейін нөмірлейміз. Шекаралық төбелерге дәрежесі 1-ге тең болатын төбелерді жатқызамыз. Нөмірі k = 0 болатын төбе ағаштың түбірі деп есептеледі. Әрі қарай, түбірден тек бір ғана доға шығады деп қабылдаймыз. Қалған төбелер V_2 жиынын құрайды және олар ішкі төбелер деп аталады. V_2 -дегі төбелерді p+1 ден r -ге дейін нөмірлейміз. Е жиынындағы доғалар бағытталған деп есептеледі. Әр доғаның бастапқы және соңғы төбелері болады. Доғаның нөмірі оның соңғы төбесінің нөміріне тең. Граф-ағашта мұндай нөмірлеу дұрыс болып табылады. Әрбір $e_j \in E$ доғасында келесідей дифференциалдық теңдеу қарастырылады[57-63]

$$l_j(y_j) \equiv -y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in e_j, \tag{3.2.1}$$

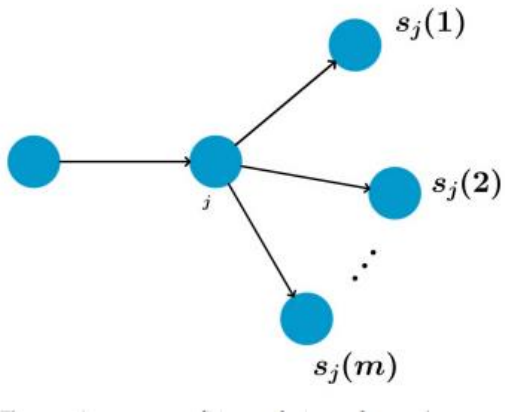
мұндағы $q_j(\cdot)\epsilon L_2(e_j)$ нақты потенциал. Ары қарай әрбір e_j доғасы $(0, b_j)$ аралығы ретінде қарастырылады Шекаралық $k \in V_1$ төбелерінде келесі шекаралық шарттар қойылады:

$$\begin{cases} y_k'(b_k) - h_k y_k(b_k) = 0, & \text{егер } k \neq 0, \\ y_{p+1}'(0) + h_{p+1} y_{p+1}(0) = 0, & \text{егер } k = 0 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

мұндағы $h_1, h_2, \dots h_{p+1}$ нақты сандар. Әрбір ішкі $j \in V_2$ төбесінде келесі үйлестіру шарттарының орындалуын талап етеміз:

$$\begin{cases} y_j(b_j) = y_{s_j(1)}(0) = \cdots = y_{s_j(m_j)}(0), \\ y_j'(b_j) - k_j y_j(b_j) = y_{s_j(1)}'(0) + \cdots + y_{s_j(m_j)}'(0), \end{cases} \tag{3.2.3}$$

мұндағы $s_j(1), \dots, s_j(m_j)$ нөмірлері j төбесінен шығатын барлық доғалардың нөмірлері (сурет 1).



1 – Сурет Граф ағаш

Мұндағы k_j , $j = p+1, \dots, r$ сандарын нақты деп саналады. Егер $k_{p+1} = \cdots = k_r = 0$, болса, онда (3.2.3) шарттары стандартты Кирхгоф шарттарына айналады [45]. [47] жұмыс бойынша, ағашта келесі қатынас орындалады

$$\sum_{d_i \in V} d_i = 2r \qquad (3.2.4)$$

мұндағы r -ағаштың доғаларының жалпы саны, d_i - ағаштың i - ші төбесінің дәрежесі.

Біздің белгілеулерде $j \in V_2$ болғанда $d_j = m_j + 1$ және $j \in V_1$ болғанда $d_j = 1$. Сондықтан, (3.2.4) қатынасы келесі түрде болады.

$$\sum_{j \in V_2} (m_j + 1) + p + 1 = 2r \qquad (3.2.5)$$

$\sum_{j \in V_2} (m_j + 1)$ шамасы ішкі төбелердегі үйлестіру шарттарының санын көрсетеді, ал $(p+1)$ шамасы шекаралық төбелердегі шекаралық шарттардың санын білдіреді. $2r$ шамасы ағаштағы доғалардың екі еселенген санын көрсетеді. Әрбір доғада екінші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі екі ерікті тұрақтыны қамтиды. Осылайша, ағаштағы барлық доғалар үшін барлығы $2r$ ерікті константа бар. Оларды анықтау үшін, (3.2.5) теңдігіне сәйкес, дәл $2r$ шекаралық шарттар мен үйлесімділік шарттары қойылады. Сондықтан, белгілі бір мағынада, (3.2.2) және (3.3.3) шарттар саны ізделетін тұрақтылардың санына сәйкес келеді. Сонымен, граф-ағаштағы (3.2.1) – (3.2.2) – (3.2.3) есебі меншікті мәндерге қойылған тура есеп болып табылады. ($l_1(\cdot), \dots l_r(\cdot)$) дифференциалдық өрнектері жиынтығымен $W_2^2(\Gamma)$ -де берілген операторды Λ_{max} арқылы белгілейміз. Λ_{max} операторының (3.2.2) шекаралық шарттарын және (3.2.3) үйлестіру шарттарын қанағаттандыратын тегіс функцияларға тарылуы Λ операторы болсын. [48,49] жұмыстарынан Λ операторының таза дискретті болатыны және ол меншікті мәндердің санаулы жиынынан тұратыны белгілі. Бұл мәндер (еселігін есепке ала отырып) бүтін функцияның сипаттамалық анықтауыш $\Delta(\lambda)$ деп аталатын нөлдерімен беттеседі. [64] бойынша Λ операторы $L_2(\Gamma)$ кеңістігінде өзіне-өзі түйіндес болып табылады.

Сондықтан Λ операторының барлық меншікті мәндері нақты болады, ал оның меншікті функциялары $L_2(\Gamma)$ кеңістігінде ортогональды базис құрады.

$\Gamma = \{V,E\}$ графының қабырғаларының саны бірден артық болсын. j– дәрежесі $m_j + 1$ болатын кез келген ішкі төбе болсын (1-сурет). j төбесі Γ – граф-ағашын (m_j) үшін $\Gamma_{kj} = \{V_{kj}, E_{kj}\}, \kappa = 1, \dots, m_j$ тармаққа бөледі. Анықтама бойынша, ағаштың тармағы түбірі ретінде j төбесін қамтитын ең үлкен ішкіағаш. j төбесінде Дирихле қосымша шарты қойылғанда, оператор Λ -ның Γ_{kj} тармағына шектелуін $\kappa = 1, \dots, m_j + 1$ үшін $\Lambda(\Gamma_{kj})$ деп белгілейміз. $k_{p+1}, \dots k_r$ сандары бекітілген болсын. Бұдан әрі $I(k_{p+1}, \dots k_r)$ талабы орындалады деп есептейміз: $b_1, \dots b_r$ қабырғалардың ұзындықтары және $h_1, \dots h_{p+1}$ сандары, сондай-ақ $q_1(\cdot), \dots q_r(\cdot)$ функциялары кез келген $j \in V_2$ үшін және барлық k, s $\in \{0, 1, \dots, m_j + 1.\}$ және $\kappa \neq$s жағдайында $\Lambda(\Gamma_{kj})$ және $\Lambda(\Gamma_{sj})$ операторларының спектрлері қиылыспайтындай етіп таңдалған.

Ескерту 3.1. Мұндай таңдауды әрқашан жүзеге асыруға болады. Мысалы, ұзындықтары $b_1, \dots b_m$ болатын m ақырлы кесіндіні қарастырайық. i = 1, ..., m үшін $L_2(0, b_i)$.) кеңістігінен алынған нақты потенциал $q_i(x)$ -ті, сондай-ақ нақты сан h_i-ді қарастырамыз. i = 1, ..., m үшін $[0, b_i]$ кесінділерінде анықталу облыстары

$$D(F_i) = \left\{y \in W_2^2\left[0, b_j\right]: y(0) = 0, y'(b_i) - h_i y(b_i) = 0\right\}. \qquad (3.2.6)$$

болатын Штурм–Лиувилль операторларын енгізейік:

$$F_i y(x) = -y''(x) + q_i(x)y(x), x\epsilon(0, b_i) \qquad (3.2.7)$$

$b_1, \dots b_m$ сандарын $F_1, \dots, F_m$ операторларының спектрлері өзара қос-қостан қиылыспайтындай етіп таңдайық, яғни $i \neq j$ болғанда $\sigma(F_i) \cap \sigma(F_j) \neq \emptyset$. Мұнда $\sigma(F_i)$ арқылы F_i операторының спектрі белгіленеді.

Егер $q_1(x) = q_2(x) = 0$ болса, онда $b_1 h_1 \neq b_2 h_2$ шартында F_1 және F_2 операторларының ортақ меншікті мәндері болмайды. Осылайша, оң $b_1, \dots b_m$ сандары $i \neq j$ үшін $F_1, \dots, F_m$ операторларының ортақ меншікті мәндері болмайтындай етіп таңдалады. Онда ұзындықтары $b_1, \dots b_m$ болатын доғалардан құралған граф-жұлдыз $I(k_{p+1}, \dots k_r)$ талабын қанағаттандырады. Көрсетілген граф- жұлдыздарды тізбектей жалғау арқылы $I\left(k_{p+1}, \dots, k_r\right)$ талабына бағынатын граф - ағашты алуға болады.

Теорема 3.1. $k_{p+1}, \dots, k_r$ мәндері бекітілген жағдайда $I\left(k_{p+1}, \dots, k_r\right)$ талабы орындалсын. Онда Λ операторының спектрі тек жай (қарапайым) нақты меншікті мәндерден ғана тұрады.

Ескерту 3.2. Осы жұмысымыздың 2-бөлімінде λ бойынша бірмәнді анықталатын

$\{\varphi_1(x_1,\lambda),\dots,\varphi_r(x_r,\lambda)\}$3функциялар жиыны енгізілген. Λ операторының сипаттамалық анықтауышы $\Delta(\lambda)$ осы функциялардың біреуі арқылы жазылады. Дәлірек айтқанда, сипаттамалық анықтауыш $\Delta(\lambda)$ келесі формуламен беріледі:

$$\Delta(\lambda)=\varphi'_{p+1}(0,\lambda)+h_{p+1}\varphi_{p+1}(0,\lambda).$$

Теорема 1 осылай анықталған $\Delta(\lambda)$ сипаттамалық анықтауышының тек қана жай нөлдерге ие болатынын тұжырымдайды.

Төменде алынатын нәтижелерді тұжырымдау үшін келесі белгілеулерді енгізейік.

j — $1,\dots,p$ сандарының бірі болсын. Ағаштың тамырын j шеттік төбемен жалғайтын $Path_j$ жолын таңдайық. Мұндай жол бар екені белгілі [3] және ол жалғыз. $Path_j$ жолының ұзындығы $l(j)+1$-ге тең болсын. $Path_j$ жолы келесі түрде реттелген төбелер тізбегінен тұрады:

$$0\prec\nu_{1j}\prec\nu_{2j}\prec\cdots\prec\nu_{l(j)j}\prec j,$$

мұнда $\nu_{1j}=p+1$.

$k_s=0, s=\nu_{m+1j,}\nu_{m+2j,}\dots,\nu_{l(j)j}$ болған жағдайда Λ операторын Λ_{mj} деп белгілейміз. Λ_{mj} және Λ_{m+1j} операторларына сәйкес сипаттамалық анықтауыштарды $\Delta_{mj}(\lambda)$ және $\Delta_{m+1j}(\lambda)$ деп енгізейік. Бұдан әрі $k_s=0,\ s=\nu_{m+1j,}\nu_{m+2j,}\dots,\nu_{l(j)j}$ жағдайындағы $I\left(k_{p+1},\dots,k_r\right)$ талабын $I_{mj}\left(k_{p+1},\dots,k_r\right)$ деп белгілейтін боламыз.

Теорема 3.2. $j<p+1$ және $m=0,1,\dots,l(j)-1$ болғанда, егер $I_{mj}\left(k_{p+1},\dots,k_r\right),\ I_{m+1j}\left(k_{p+1},\dots,k_r\right)$талаптары орындалса, онда $\Delta_{mj}(\lambda)$ және $\Delta_{m+1j}(\lambda)$ сипаттамалық анықтауыштарының нөлдері жай болады және өзара алмасып кезектесіп орналасады.

Теорема 3.2-ден қаттылығы $k_s, s=\nu_{m+1j,}$ болатын жаңа серіппені қосу барлық меншікті мәндерді солға қарай жылжытатыны шығады.

[61] монографиясының терминологиясына сәйкес Λ_{mj} және Λ_{m+1j} операторлары Вайнштейннің аралық есептеріне сәйкес келеді. Кесіндідегі дифференциалдық операторлар үшін Теорема 3.2-нің аналогы [63] жұмысында дәлелденген.

Осы бөлімнің қорытынды бөлігінде қаттылық коэффициенттері $k_{p+1},\dots,k_r$ Вайнштейннің аралық есептерінің меншікті мәндерінің ақырлы жиыны бойынша бірмәнді түрде есептелетіні дәлелденген.

Граф-жұлдыздың ішкі төбесіндегі бейлокал үйлесімділік шарттарын қалпына келтірудің неғұрлым жалпы есебі Н.П. Бондаренконың [64,65] жұмысында шешілген. Сонымен қатар, Н.П. Бондаренко қалпына келтіру бірмәнді жүзеге асуы үшін сандық тізбек қанағаттандыруы тиіс қажетті және жеткілікті шарттарды көрсеткен. Осы жұмыстың Н.П. Бондаренконың жұмысынан айырмашылығы $k_{p+1},\dots,k_r$ сандарының бірмәнді қалпына

келтірілуі ақырлы $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{r-p}\}$ сандар жиыны бойынша жүзеге асырылады. Ал кесіндідегі дифференциалдық оператор жағдайында шекаралық коэффициенттерді меншікті мәндердің ақырлы жиыны бойынша қалпына келтіруді [66-69] жұмысынан табуға болады.

3.3Граф-жұлдыздағы Штурм–Лиувилль біртекті теңдеуінің негізгі шешімдері

Алдымен, [69] жұмысындағы Теорема 5.1 нәтижесінен келесі тұжырым шығатындығын еске салайық.

Лемма 3.1. Кез келген нақты сандар k_{p+1}, ..., k_r үшін Λ операторы $L_2(Г)$ кеңістігінде өз-өзіне сыбайлас болып табылады.

Сондықтан, Λ = Λ∗ болғандықтан, $L_2(Г)$ кеңістігінде Λ операторының меншікті функциялар жүйесі ортогональды базис құрайды және де Λ операторының барлық меншікті мәндері нақты сандар болады.

Λ операторындағы барлық меншікті мәндердің жай екенін дәлелдеу үшін $\{\varphi_1(x_1, \lambda), \dots, \varphi_r(x_r, \lambda)\}$ функциялар жиынын енгіземіз. Ең алдымен, алғашқы $\{\varphi_1(x_1, \lambda), \dots, \varphi_p(x_p, \lambda)\}$ p функцияларды (1) теңдеулер мен Коши шарттарын

$$\varphi_j(b_j) = 1, \qquad \varphi_j'(b_j) = h_j, j = 1, \dots p$$

қанағаттандыратындай етіп анықтаймыз.

Осындай шешімдер бар және олар λ бойынша бүтін функциялар болады [12]. Келесі функциялар жүйесін енгізейік: $\psi_j(x, \lambda) = A_j \varphi_j(x, \lambda),\ x \epsilon e_j$. Мұндағы $A_1, \dots, A_p$ сандары

$$\{\psi_1(x_1, \lambda), \dots, \psi_{m-1}(x_p, \lambda)\}$$

жүйесінің шарттарына сай таңдалады. A_j— x_j-дан тәуелсіз, бірақ параметр λ -ге байланысты болуы мүмкін қандай да бір тұрақтылар. Ағаштың биіктігі ең үлкен болатын ішкі төбесін таңдап алайық. Оны $n \in V_2$ деп белгілеп, биіктігін H деп алайық. Төбесі n тек шеткі $s_n(1), \dots, s_n(m_n)$ төбелер арқылы қосылған. Кейде [70-73] жұмысында айтылғандай, n төбесі $s_n(1), \dots, s_n(m_n)$ шеттік төбелерге инцидентті болады. $(m_n + 1)$ саны — төбе n-нің дәрежесін білдіреді. Ішкі төбе n-де $\psi_j(x_j)$ функциялары үшін үйлесімділік шарттарының бірінші шарты (3) орындалуы үшін келесі тұрақтыларды $A_{s_n(1)}, \dots, A_{s_n(m_n)}$ былайша таңдау жеткілікті:

$$A_{s_n(j)} = A_n \prod_{i=1, i \neq j}^{m_n} \varphi_{s_n(i)}(0, \lambda) \qquad (3.3.1)$$

мұндағы A_n барлық $A_{s_n(1)}, \dots, A_{s_n(m_n)}$ үшін ортақ тұрақты, және ол λ -ге тәуелді болуы мүмкін. Нәтижесінде, $\psi_n(b_n, \lambda)$ үшін келесі өрнек шығады:

$$\psi_n(b_n, \lambda) = A_n \prod_{i=1}^{m_n} \varphi'_{s_n(i)}(0, \lambda) \quad (3.3.2)$$

Ескерейік, $I(k_{p+1}, \dots, k_r)$ талабының орындалуынан мына теңсіздік шығады:

$$\varphi_j(0, \lambda) \neq 0, j = 1, \dots, p.$$

(3) түріндегі екінші қатынастан $\psi'_n(b_n, \lambda))$ үшін келесі өрнек шығады. Дәлірек айтқанда, мына формула дұрыс:

$$\psi'_n(b_n, \lambda) = A_n \Big(\sum_{j=1}^{m_n} \prod_{i=1, i\neq j}^{m_n} \varphi_{s_n(i)}(0, \lambda) \varphi'_{s_n(j)}(0, \lambda) + k_n \prod_{i=1}^{m_n} \varphi_{s_n(i)}(0, \lambda) \Big) \quad (3.3.3)$$

Осылайша, біз $x_n = b_n$ соңғы нүктесі e_n доғасының қалпын таптық. Бұл жағдай $\big(\psi_n(b_n, \lambda), \psi'_n(b_n, \lambda)\big)$ сандар жұбы арқылы анықталады. Келесі қадамда кез келген x_n нүктесі үшін e_n доғасының қалпын табамыз. Бұл қалып $\big(\psi_n(x_n, \lambda), \psi'_n(x_n, \lambda)\big)$ санда жұбы арқылы сипатталады. Қажетті сан жұбы келесі формула арқылы есептеледі:

$$\begin{bmatrix} \psi_n(x_n, \lambda) \\ \psi'_n(x_n, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_n(x_n, \lambda) & s_n(x_n, \lambda) \\ c'_n(x_n, \lambda) & s'_n(x_n, \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n(b_n, \lambda) \\ \psi'_n(b_n, \lambda) \end{bmatrix}, \quad (3.3.4)$$

мұндағы $c_n(x_n, \lambda)$ және $s_n(x_n, \lambda)$ келесі Коши есебінің шешімдері болып табылады:

$$-y''_n(x_n, \lambda) + q_n(x_n) y_n(x_n, \lambda), 0 < x_n < b_n,$$

$$s'_n(b_n, \lambda) = c_n(b_n, \lambda) = 1, s_n(b_n, \lambda) = c'_n(b_n, \lambda) = 0$$

$\varphi_n(x_n, \lambda)$ арқылы мына функцияны белгілейміз: $\frac{\psi_n(x_n, \lambda)}{A_n}$. Атап айтқанда, $x_n = 0$ кезінде e_n доғасының басындағы $\big(\psi_n(0, \lambda), \psi'_n(0, \lambda)\big)$жағдайы белгілі. Енді n ∈ V_2 төбесінің биіктігімен беттесетін барлық ішкі төбелерді таңдайық. Олардың нөмірлері $n_1, \dots, n_k$ болсын. Көрсетілген алгоритм бойынша олардың жағдайларын есептейміз: $\Big\{\big(\psi_{n_1}(0, \lambda), \psi'_{n_1}(0, \lambda)\big), \dots, \big(\psi_{n_k}(0, \lambda), \psi'_{n_k}(0, \lambda)\big)\Big\}$. Осылайша, бізге биіктігі H барлық төбелердің жағдайы белгілі болды.

$\left(\psi_n(0,\lambda), \psi_n'(0,\lambda)\right)$ мәндерін біле отырып, $(\psi_t(b_t,\lambda), \psi_t'(b_t,\lambda))$ мәндерін анықтауға көшеміз, мұндағы t — e_n доғасы шығатын төбе нөмірі. t төбесінің биіктігі n төбесінің биіктігінен бір бірлікке төмен екендігі түсінікті. Сондықтан жоғарыда көрсетілген алгоритм бойынша $\left(\psi_t(b_t,\lambda), \psi_t'(b_t,\lambda)\right)$ жағдайын табуға болады. Осылайша біз төбелердің биіктігін бір бірлікке азайттық. Биіктіктерді біртіндеп азайтуды жалғастырсақ, нөлдік биіктігі бар төбеге жетеміз, яғни ағаштың түбіріне. Осылайша біз $(\varphi_1(x_1,\lambda), \dots, \varphi_r(x_r,\lambda))$ функцияларының толық жиынтығын құрамыз. Және де, $I\left(k_{p+1}, \dots, k_r\right)$ талабының орындалуынан келесі теңсіздіктер шығады: $\varphi_j(x_1,\lambda) \neq 0, j = p+1, \dots r.$ Нәтижесінде келесі өрнек шығады:

$$\psi_{p+1}'(0,\lambda) + h_{p+1}\psi_{p+1}(0,\lambda) = A_{p+1}(\psi_{p+1}'(0,\lambda) + h_{p+1}\varphi_{p+1}(0,\lambda))$$

мұндағы A_{p+1} қандай да бір тұрақты. Ескерейік, $\varphi_{p+1}\left(x_{p+1},\lambda\right))$ функциясы λ −ға қатысты бүтін функция болып табылады.

Лемма 3.2. Λ операторының спектрі қалыпты меншікті мәндерден тұрады, олар төмендегі бүтін функциялардың нөлдеріне сәйкес келеді:

$$\Delta(\lambda) = \varphi_{p+1}'(0,\lambda) + h_{p+1}\varphi_{p+1}(0,\lambda).$$

Келесі тұжырымда Δ(λ) бүтін функциясының нөлдерінің жай (қарапайым) екенін көрсетеміз.

Лемма 3.3. Λ операторының барлық меншікті мәндері бір еселі болады.

Лемма 3.3-тің дәлелденуі [74] жұмысындағы Лемма 1-дің дәлелденуіне ұқсас.

λ, μ — кез келген комплекс сандар болсын. Келесі айырманы қарастырайық:

$$R = \langle \Lambda_{max}\vec{\Phi}(\lambda), \vec{\Phi}(\mu) \rangle_{L_2(\Gamma)} - \langle \Phi(\lambda), \Lambda_{max}\vec{\Phi}(\mu)\rangle_{L_2(\Gamma)},$$

мұндағы $\vec{\Phi}(\lambda) = [\varphi_1(x_1,\lambda), \dots, \varphi_r(x_r,\lambda)]^T, \vec{\Phi}(\mu) = [\varphi_1(x_1,\mu), \dots, \varphi_r(x_r,\mu)]^T$

[74] жұмысында кез келген ағаштағы екінші ретті дифференциалдық операторлар үшін Лагранж формуласы дәлелденген. [74] жұмысындағы Лагранж формуласына сәйкес, келесі өрнек шығады:

$$R = \sum_{j=1}^{p}\Big[-\left(\varphi_j'(b_j,\lambda) - h_j\varphi_j(b_j,\lambda)\right)\overline{\varphi_j(b_j,\mu)} + \varphi_j(b_j,\lambda)\overline{(\varphi_j'(b_j,\mu) - h_j\varphi_j(b_j,\mu))}\Big] + \left(\varphi_{p+1}'(0,\lambda) + h_{p+1}\varphi_{p+1}(0,\lambda)\right)\overline{\varphi_{p+1}(0,\mu)} - \varphi_{p+1}(0,\lambda)\overline{(\varphi_{p+1}'(0,\mu) + h_{p+1}\varphi_{p+1}(0,\mu))}. \quad (3.3.5)$$

j = 1, ..., p үшін келесі қатынастар орындалатынын ескерейік: $\varphi_j'\left(b_j,\lambda\right) - h_j\varphi_j\left(b_j,\lambda\right) = 0$. Сондықтан (3.3.5) өрнегінен мына қатынас шығады:

$$R = \Delta(\lambda)\overline{\varphi_{p+1}(0,\mu)} - \varphi_{p+1}(0,\lambda)\overline{\Delta(\mu)}. \quad (3.3.6)$$

$\lambda = \lambda_0$ — Λ операторының кез келген меншікті мәні болсын. (3.3.6) теңдеуінде $\mu \to \lambda_0$ деп шекке өтейік. Толығырақ [75] жұмысында қарастырылған. Нәтижесінде келесі теңдік шығады:

$$\lim_{\mu\to\lambda_0} \langle \vec{\Phi}(\lambda_0), \vec{\Phi}(\mu) \rangle_{L_2(\Gamma)} = -\varphi_{p+1}(0,\lambda_0)\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} \quad (3.3.7)$$

Сондықтан, $\left\|\vec{\Phi}(\lambda_0)\right\|^2_{L_2(\Gamma)} > 0$ болғандықтан, (3.3.7) теңдігінен мына нәтиже шығады:

$$\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0, \varphi_{p+1}(0,\lambda_0) \neq 0.$$

Көрсетілген теңсіздіктердің біріншісі Λ операторының барлық меншікті мәндері жай (қарапайым) болатынын көрсетеді. Осылайша, Лемма 3 толық дәлелденді, ал Лемма 3.3-тен Теорема 3.1 тұжырымы шығады. Ескерту 3. $I\left(k_{p+1}, \dots k_r\right)$ талабының мәні — біздің құрған $\varphi_1(x_1,\lambda), \varphi_2(x_2,\lambda), \dots, \varphi_r(x_r,\lambda)$ шешімдері ағаштың ішкі төбелерінде нөлге айналмайды.

3.4 Әр түрлі үйлесімділік шарттарындағы сипаттамалық анықтауыштар арасындағы байланыс

1, ..., p сандарының бірі - j болсын. Ағаштың тамырын j шеткі төбесімен жалғайтын $Path_j$ жолын таңдайық. Мұндай жол бар екені белгілі [76] және ол жалғыз. $Path_j$ жолының ұзындығы l(j) + 1-ге тең болсын. $Path_j$ жолы келесі реттелген төбелер тізбегінен тұрады:

$$0 \prec v_{1j} \prec v_{2j} \prec \cdots \prec v_{\mathrm{l(j)j}} \prec j,$$

мұндағы $v_{1j} = p + 1$.

$k_s = 0,\ s = v_{m+1j}, v_{m+2j}, \dots, v_{l(j)j}$, болған жағдайда Λ операторын Λ_{mj} деп белгілейміз. Осы бөлімде әртүрлі Λ операторларының сипаттамалық анықтауыштары $\Delta_{mj}(\lambda)$ және $\Delta_{m-1j}(\lambda)$ арасындағы байланыс қарастырылады.

2-бөлімде енгізілген $\varphi_1(x_1,\lambda), \dots, \varphi_r(x_r,\lambda)$ шешімдерімен қатар (1) теңдеулер жүйесінің $\theta_{1,mj}(x_1,\lambda), \dots, \theta_{r,mj}(x_r,\lambda)$ шешімдерін енгіземіз. Алдымен k = 1, ..., j − 1, j + 1, ..., p + 1 үшін $\theta_{k,mj}$ шешімдерін анықтаймыз, олар шеткі төбелерде Коши шарттарына бағынады:

$$\begin{cases} \theta_{k,mj}(b_k,\lambda)=1, \theta'_{r,mj}(b_k,\lambda)=h_k, 1\le k\le p, \\ \theta_{p+1,mj}(0,\lambda)=1, \theta'_{p+1,mj}(0,\lambda)=h_{p+1}. \end{cases}$$

Енді шеттік төбе j-ді ағаштың тамыры деп есептейік, ал 0 нөмірлі төбені шеттік төбелердің бірі деп алайық. Бұл жағдайда әрбір төбенің биіктігі өзгереді, өйткені биіктік — төбені ағаш тамырымен қосатын жолдың ұзындығына тең. Түбір ауысқандықтан, әр төбенің биіктігі де өзгереді.

Келесіде r ≥ k > p + 1 және k = j үшін $\theta_{k,mj}(x_k,\lambda)$ шешімдері $\varphi_{p+1}(x_p,\lambda),\dots,\varphi_r(x_r,\lambda)$ шешімдерін $\varphi_1(x_1,\lambda),\dots,\varphi_p(x_p,\lambda)$ бойынша есептеу тәртібімен, төбелердің биіктігінің азаюын ескеріп, анықталады.

Ескерту 3.4. $I_{mj}(k_{p+1},\dots,k_r)$ және $I_{m+1j}(k_{p+1},\dots,k_r)$ талаптарынан шығатыны: ағаштың ішкі төбелерінде $\left(\theta_{1,mj}(x_1,\lambda),\dots,\theta_{r,mj}(x_r,\lambda)\right)$функциялары нөлге тең болмайды. μ = λ болсын, және келесі векторлық белгілеу енгізіледі:

$$\vec{\theta}_{mj}(\mu)=\left[\theta_{1,mj}(x_1,\lambda),\dots,\theta_{r,mj}(x_r,\lambda)\right]^T.$$

$\vec{\theta}_{mj}(\mu)$ векторлық функциясы $k_s=0,\ s=v_{m+1j},v_{m+2j},\dots,v_{l(j)j}$ болған жағдайға сәйкес келетіндігін ескерейік, ал $s=v_{1j},\dots,v_{mj}$ үшін k_s кез келген нақты мәндер қабылдай алады. Енді $k_{p+1},\dots,k_r$ параметрлерінің басқа бір жиынын келесі ереже бойынша таңдайық: барлық k_s мәндері $s\neq v_{mj}$ болғанда,k_s − ке тең, ал $s=v_{mj}$ болғанда $k_s=0$. Екінші бөлімде құрылған $\varphi_1(x_1,\lambda),\dots,\varphi_r(x_r,\lambda)$ шешімдері осы $k_{p+1},\dots,k_r$ параметрлер жиынына сәйкес болсын. Ыңғайлылық үшін бұл шешімдер жиынын былай белгілейміз: $\varphi_{1m}(x_1,\lambda),\dots,\varphi_{rm}(x_r,\lambda)$. Келесі мақсаттар үшін келесі вектор енгізіледі:

$$\vec{\Phi}_m(\lambda)=[\varphi_{1m}(x_1,\lambda),\dots,\varphi_{rm}(x_r,\lambda)]^T.$$

$\vec{\Phi}_m(\lambda)$ және $\vec{\theta}_{mj}(\mu)$ функциялары үшін келесі айырманы қарастырайық:

$$R=\langle\Lambda_{max}\vec{\Phi}_m(\lambda),\vec{\theta}_{mj}(\mu)\rangle_{L_2(\Gamma)}-\langle\vec{\Phi}_m(\lambda),\Lambda_{max}\vec{\theta}_{mj}(\mu)\rangle_{L_2(\Gamma)}$$

[11] жұмысындағы Лагранж формуласы арқылы R айырмасын есептесек, келесі қатынас шығады:

$$\begin{aligned} 0=R=&-\varphi'_{j,m}(b_j,\lambda)\overline{\theta_{j,mJ}(b_j,\mu)}+\varphi_{j,m}(b_j,\lambda)\overline{\theta'_{j,mJ}(b_j,\mu)} \\ &+\varphi'_{p+1,m}(0,\lambda)\overline{\theta_{p+1,mJ}(0,\mu)}-\varphi_{p+1,m}(0,\lambda)\overline{\theta'_{p+1,mJ}(0,\mu)} \\ &+\left[-\varphi'_{z,m}(b_z,\lambda)\overline{\theta_{z,mJ}(b_z,\mu)}+\varphi_{z,m}(b_z,\lambda)\overline{\theta'_{z,mJ}(b_z,\mu)}\right] \\ &+\left[\varphi'_{\tau,m}(0,\lambda)\overline{\theta_{\tau,mJ}(0,\mu)}-\varphi_{\tau,m}(0,\lambda)\overline{\theta'_{\tau,mJ}(0,\mu)}\right]+\cdots \end{aligned}$$

мұнда $z = \nu_{mj}$. Мұндағы **...** белгісі m төбесінен шығатын доғалардың қосындысын ескеретінін білдіреді.

(2) шекаралық шарттарды және (3) үйлесімділік шарттарды ескерсек, мына теңдікті аламыз:

$$0 = \overline{(\theta'_{j,m_J}(b_j,\bar{\lambda}) - h_j\theta_{\iota,m_J}(b_j,\mu))} - \Delta_{m-1j}(\lambda) + k_z\varphi_{z,m}(b_z,\lambda)\overline{\theta_{z,m_J}(b_z,\mu)}.$$

мұнда $z = \nu_{mj}$. $\overline{(\theta'_{j,m_J}(b_j,\mu) - h_j\theta_{\iota,m_J}(b_j,\mu))}$ Λ_{mj} операторының сипаттамалық анықтауышы екендігін байқаймыз.

$$\Delta_{mj}(\lambda) = \overline{\theta'_{j,m_J}(b_j,\bar{\lambda}) - h_j\theta_{\iota,m_J}(b_j,\bar{\lambda})}$$

деп белгілейік.

Лемма 3.4. Λ_{mj} және Λ_{m-1j} операторларының сипаттамалық анықтауыштары келесі қатынаспен байланысты:

$$\Delta_{mj}(\lambda) = \Delta_{m-1j}(\lambda) - k_z\varphi_{z,m}(b_z,\lambda)\overline{\theta_{z,m_J}(b_z,\bar{\lambda})}$$

мұнда $z = \nu_{mj}$.

Әртүрлі операторлардың сипаттамалық анықтауыштарынмен байланысты ұқсас формулалар [8] жұмыста келтірілген.

Айталық, Λ_{mj} операторының $\lambda = \lambda_n^{(mj)}$ қандайда бір меншікті мәні болсын.

$$\varphi_{s,m}\left(x_s,\lambda_n^{(mj)}\right) = \frac{\theta_{s,m_j}\left(x_s,\lambda_n^{(mj)}\right)}{\theta_{j,m_j}\left(b_j,\lambda_n^{(mj)}\right)}, x_s \in e_s. \quad (3.4.1)$$

болатынын түсіну қиын емес, мұндағы e_s–$Path_j$ жолының доғасы, және $z \geq \nu_{mj}$. Яғни s ∈ $Path_j$ төбесі j төбесінен ν_{mj} төбесіне қарағанда алыс емес. Сонымен қатар

$$\theta_{s,m+1j}(x_s,\lambda), \theta_{s,mj}(x_s,\lambda), x_s \in e_s, \forall\lambda \in \mathbb{C} \quad (3.4.2)$$

екендігін ескерейік, мұндағы e_s –$Path_j$ жолының доғасы, және де $s \preccurlyeq \nu_{mj}$. Яғни, s ∈ $Path_j$ төбесі ағаштың түбіріне қарай ν_{mj} төбесіне қарағанда алыс емес.

$$W_{m,mj}(\lambda) = \frac{\Delta_{mj}(\lambda)}{\Delta_m(\lambda)},$$

белгілеуін енгізейік. Бұл анықтауышты [77] әдебиетте Вайнштейн анықтауышы деп аталған. Онда Миттаг-Леффлер теоремасы бойынша $W_{m,mj}(\lambda)$ мероморфтық

функциясы өзінің полюстерінің аймағында Лоран жіктелуінің негізгі бөліктері арқылы қалпына келтіріледі. Онда лемма 4-тен жаңа өрнек аламыз:

$$W_{m,mj}(\lambda) = 1 - k_z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n^{(m)}} \operatorname*{res}_{\lambda_n^{(m)}} \frac{\varphi_{z,m}(b_z,\lambda)\overline{\theta_{z,mJ}(b_z,\lambda)}}{\Delta_m(\lambda)}$$

мұнда z =ν_{mj}.

Келесідей шегерімді есептейік:

$$\operatorname*{res}_{\lambda_n^{(m)}} \frac{\varphi_{z,m}(b_z,\lambda)\overline{\theta_{z,mJ}(b_z,\lambda)}}{\Delta_m(\lambda)} = \frac{\varphi_{z,m}\left(b_z,\lambda_n^{(m)}\right)\overline{\theta_{z,mJ}\left(b_z,\lambda_n^{(m)}\right)}}{\frac{d}{d\lambda}\Delta_m(\lambda)\Big|_{\lambda_n^{(m)}}} =$$

$$= \frac{\theta_{z,mj}\left(b_z,\lambda_n^{(m)}\right)\overline{\theta_{z,mJ}\left(b_m,\lambda_n^{(m)}\right)}}{\theta_{j,mj}\left(b_z,\lambda_n^{(m)}\right)\frac{d}{d\lambda}\overline{\Delta_m(\lambda)}\Big|_{\lambda_n^{(m)}}} = -\frac{\left|\theta_{z,mj}\left(b_z,\lambda_n^{(m)}\right)\right|^2}{\left\|\vec{\theta}_{mj}\left(\lambda_n^{(m)}\right)\right\|^2} = a_n^{(m)} \le 0.$$

Бұдан Вайнштейннің анықтауышы төмендегі түрге келеді

$$W_{m,mj}(\lambda) = 1 - k_z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(mj)}}{\lambda - \lambda_n^{(m)}}, z = \nu_{mj}.$$

Ескерту 3.5. Шын мәнінде, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(mj)}}{\lambda-\lambda_n^{(m)}}$ қатары абсолютті жинақты, өйткені $\sup_{n\ge1}\left|a_n^{(mj)}\right|$ ақырлы, ал $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^{(m)}}$ қатары абсолютті жинақты. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^{(m)}}$ қатарының абсолютті жинақтылығы $\lambda_n^{(m-1)} \approx n^2$ меншікті мәндері үшін өрескел асимптотикалық формулалардан туындайды. [78,79] жұмыста меншікті мәндер үшін дәлірек асимптотикалық формулалар берілген. $\sup_n\left|a_n^{(mj)}\right|$ шамасының шектелгендігі келесі теңсіздіктерден туындайды

$$\left|a_n^{(mj)}\right| = \frac{\left|\theta_{z,mj}\left(b_z,\lambda_n^{(m)}\right)\right|^2}{\left\|\vec{\theta}_{mj}\left(\lambda_n^{(m)}\right)\right\|^2} \preccurlyeq \frac{\left|\theta_{z,mj}\left(b_z,\lambda_n^{(m)}\right)\right|^2}{\left\|\theta_{mj}\left(.,\lambda_n^{(m)}\right)\right\|^2} \preccurlyeq \frac{\left|\theta_{z,mj}\left(b_z,\lambda_n^{(m)}\right)\right|^2}{\int_{bz-\delta}^{b_z}\left|\vec{\theta}_{mj}\left(\lambda_n^{(m)}\right)\right|^2 dx}$$

$$\preccurlyeq \frac{\left|\theta_{z,mj}\left(b_z,\lambda_n^{(m)}\right)\right|^2}{\delta\min\{\left|\theta_{z,mj}\left(b_z,\lambda_n^{(m)}\right)\right|^2 : b_{z-\delta} \le x \le b_z\}}$$

Сонымен, дәлелденді.

Лемма 3.5. Барлық $\lambda \in \mathbb{C}$ үшін келесі теңдік орындалады

$$\Delta_{mj}(\lambda) = \Delta_m(\lambda)(1 - k_z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(mj)}}{\lambda - \lambda_n^{(m)}}) \quad (3.4.3)$$

мұндағы $z = \nu_{mj}$ и $a_n^{(mj)} \leq 0$. (3.4.3) теңдіктен келесі тұжырымдар шығады.

Салдар 3.1. Егер қандай да бір $a_n^{(mj)} = 0$, онда $\lambda_n^{(m)} = \lambda_n^{(mj)}$.

Салдар 3.2. $z = \nu_{mj}$ үшін $k_z > 0$ болсын, онда барлық $a_n^{(mj)} < 0$ үшін келесі теңсіздік орындалады

$$\lambda_n^{(mj)} < \lambda_{n+1}^{(m)} < \lambda_{n+1}^{(mj)}.$$

3.5 Кванттық графтардың сипаттамалық функциялары

Бұл пункта топология кез келген граф-ағаш үшін сипаттамалық анықтауыштарын өрнектелгендігі көрсетілген.

Кванттық графтар теориясы, яғни графтық облыстарда анықталған Шредингер немесе Дирак операторлары, кәдімгі дифференциалдық теңдеулер саласындағы тез дамып келе жатқан зерттеу бағыты болып табылады (мысалы, [21, 22, 80–86] қараңыз). Ұқсас мәселелер жіптер немесе өзектер торларының кіші көлденең тербелістер теориясында да кездеседі (шолу ретінде [104] қараңыз). Бұл теорияларда шекті графтар үшін әдетте ішкі төбелерде үздіксіздік шарттары мен Кирхгоф шарттары, ал ілінген (шеткі) төбелерде Робин шарттары қойылады. Мұның барлығы физикалық негіздемеден туындайды. Робин шарттарының маңызды жеке жағдайлары — осы тарауда қолданылатын Дирихле және Нейман шарттары. Мақсатымызды түсіндіру үшін (мысалы, [87, 88] қараңыз) екі өздігінен түйіндес Штурм–Лиувилль шекаралық есептерінің меншікті мәндері мына түрде берілетінін еске түсірейік:

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad (3.5.1)$$

$$y'(0) + Hy(0) = 0, \quad (3.5.2)$$

$$y'(1) + h_j y(1) = 0, j = 1,2. \quad (3.5.3)$$

мұндағы $q \in L_2(0,1)$— нақты функция, $H \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $h_j \in \mathbb{R} \cup \infty$ және $h_1 < h_2$ болғанда, меншікті мәндер қатаң мағынада кезектеседі:

$$-\infty < \left(\lambda_1^{(1)}\right)^2 < \left(\lambda_1^{(2)}\right)^2 < \left(\lambda_2^{(1)}\right)^2 < \left(\lambda_2^{(2)}\right)^2 < \cdots .$$

Егер $h = 0$ болса, сәйкес шекаралық шарт Нейман шарты деп аталады, ал егер $h = \infty$ болса, онда ол Дирихле шарты деп аталады. Бұл жіптің кіші көлденең тербелістерінің жалпы теңдеуінен туындайтын шекаралық есептер үшін [78]-де алынған жалпы нәтижелердің жеке жағдайы болып табылады.

Шекаралық есептердің спектрлері арқылы қырлардағы потенциалдарды қалпына келтіруге қатысты кері есептерді шешу үшін спектрлік деректерді сипаттау қажет. Классикалық жағдайда ([82] қараңыз) меншікті мәндердің кезектесу қасиеті және спектрдің кейбір асимптотикалары екі тізбектің (3.5.1)–(3.5.3) есептерінің спектрлері болуы үшін қажетті әрі жеткілікті шарттарды береді. Сондықтан біз кез келген байланысқан шекті метрлік графтағы шекаралық есептердің спектрі болатын нақты сандар тізбектері үшін қажетті әрі жеткілікті шарттардың құрамында кезектесудің белгілі бір түрі болуы тиіс деп күтеміз.

[24]-те кері үш-спектрлік есеп үшін классикалық кезектесудің келесі аналогы алынған. $\{\lambda_k\}_{k\neq 0,\ -\infty}^{\infty}$ — мына есептің спектрі болсын:

$$y'' + \lambda^2 y - q(x)y = 0,$$

$$y(0) = y(a) = 0.$$

Мұнда потенциал $q(x) \in W_2^1(0,a)$ — нақты және спектр нақты болып, 0-ді қамтымайтындай болады.

$\{\lambda_k\}_{k\neq 0,\ -\infty}^{\infty}$ және $\left\{\lambda_k^{(1)}\right\}_{k\neq 0,\ -\infty}^{\infty}$ жиындары сәйкесінше келесі есептердің спектрлері болсын:

$$y'' + \lambda^2 y - q(x)y = 0,$$

$$y(0) = y\left(\frac{a}{2}\right) = 0,$$

және

$$y'' + \lambda^2 y - q(x)y = 0,$$

$$y\left(\frac{a}{2}\right) = y(a) = 0.$$

Теорема 3.2. (а) Барлық λ_k, ν_kжәне $\nu_k^{(1)}$— қарапайым (simple) меншікті мәндер, әрі $0 < \lambda_1 < \nu_1, \lambda_1 < \nu_1^{(1)}$.

(b) Әрбір $n > 1$ үшін келесі альтернатива орындалады: не болмаса (λ_1, λ_n) аралығы $\{\nu_k\}_1^\infty \cup \{\nu_k^{(1)}\}_1^\infty$ жиынынан дәл $n-1$ элементті қамтиды және бұл жағдайда $\lambda_n \notin \{\lambda_k\}_{k\neq 0}^{\infty}{}_{-\infty} \cup \{\nu_k^{(1)}\}_1^\infty$ немесе (λ_1, λ_n) аралығы осы жиыннан дәл $n-2$ элементті қамтиды және бұл жағдайда $\lambda_n \in \{\nu_k\}_1^\infty \cap \{\nu_k^{(1)}\}_1^\infty$.

Бұл теореманың дәлелі [25, теорема 1.13]-те келтірілген. Теореманы тең емес ішкі аралықтар жағдайына, сондай-ақ q функцияларының кеңірек класына және әртүрлі шекаралық шарттарға жалпылау [93]-те алынған. Басқа жалпылаулар мен дискреттік аналогтар үшін [87-92] еңбектерін қараңыз.

Жоғарыда қарастырылған $[0, a]$ аралығындағы спектрлік есептерді әрқайсысының ұзындығы $\frac{a}{2}$ болатын екі қыры бар жұлдыз тәрізді графтағы есептер ретінде қарастыруға болады. Бұл жағдайда

$$y\left(\frac{a}{2}-0\right) = y\left(\frac{a}{2}+0\right) = 0$$

шарттарын Дирихле шарттары деп атаймыз, ал

$$y\left(\frac{a}{2}-0\right) = y\left(\frac{a}{2}+0\right), \qquad y'\left(\frac{a}{2}-0\right) = y'\left(\frac{a}{2}+0\right)$$

шарттарын Нейман шарттары деп атаймыз. Сонда $\{\lambda_k\}_{k\neq 0}^\infty$ жиынын Нейман спектрі, ал $\{\nu_k\}_{k\neq 0}^\infty \cup \{\nu_k^{(1)}\}_{k\neq 0}^\infty$жиынын Дирихле спектрі деп атауға болады. Осы жұмыста біз бұл ұғымдардың ағаштар үшін жалпылауларын қолданамыз.

Екі қырдан артық қырлары бар жұлдыз тәрізді графтар үшін жоғарыдағы кезектесу (interlacing) нәтижелерінің жалпылаулары Штурм–Лиувилль есептері үшін [96-102, 26]-да, Стилтьес жіптері үшін [3]-те және жіптің теңдеуімен туындайтын есептер үшін [98]-де алынған. Ал меншікті мәндері қарапайым болатын графтар жағдайы [89]-да жалпыланған.

Бұл бөлімде біз ағаштар жағдайын қарастырамыз, бірақ меншікті мәндердің геометриялық кратностарының еркін болуына рұқсат етеміз. Біз келесі пайдалы формулаларды орнатамыз:

$$\phi_N(\lambda^2) = \phi_N^{(1)}(\lambda^2)\phi_D^{(2)}(\lambda^2) + \phi_N^{(2)}(\lambda^2)\phi_D^{(1)}(\lambda^2),$$

$$\phi_D(\lambda^2) = \phi_D^{(1)}(\lambda^2)\phi_D^{(2)}(\lambda^2),$$

яғни бүкіл графтағы Нейман және Дирихле есептерінің сипаттамалық функцияларын ішкі графтардағы сәйкес функциялармен байланыстырамыз. Бұл формулалар ішкі графтардың біреуі тек бір қырдан тұратын жағдайда [17]-де алынған. Сонымен қатар, $\frac{\phi_D}{\phi_N}$ функциясы тереңірек талданады.

Сондай-ақ біз ағаштағы әртүрлі шекаралық есептердің меншікті мәндерінің кезектесу қасиетін зерттейміз. Айта кету керек, бұл нәтижелер

Стилтьес жіптерінің кіші тербелістерімен байланысты рекурренттік қатынастар арқылы туындайтын шекаралық есептер жағдайында да дұрыс болып табылады.

T— n қыры бар метрлік ағаш болсын. Төбелерді v_j арқылы, олардың дәрежелерін $d(v_j)$ арқылы, қырларды e_j арқылы, ал олардың ұзындықтарын l_j арқылы белгілейміз. Кез келген бір төбе v түбір ретінде таңдалады. Қырлар үшін жергілікті координаталар e_j қырын $[0, l_j]$ аралығымен сәйкестендіреді, мұнда түбірге дейінгі қашықтық азайған сайын жергілікті координата артады. Бұл, түбір болып табылмайтын әрбір ілінген (шеткі) төбенің жергілікті координатасы 0-ге тең екенін білдіреді. Ал түбірге жанасатын кез келген j-қыр үшін түбірдің жергілікті координатасы l_j-ге тең болады. Қалған барлық ішкі төбелер v үшін бір шығатын қыр болады, оның жергілікті координатасы 0-ге тең, ал vтөбесіне келетін e_jқыры үшін v-ның жергілікті координатасы l_j-ге тең.

Қырлардағы y_j функциялары n скаляр Штурм–Лиувилль теңдеулерінен тұратын жүйеге бағынады:

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda^2 y_j, \tag{3.5.4}$$

мұнда q_j— $L^2[0, l_j]$ кеңістігіне тиесілі нақты мәнді функция. Ілінген төбеге жанасатын e_j қыры үшін біз өздігінен түйіндес шекаралық шарттарды қоямыз:

$$y_j'(0) + \beta_j y_j(0) = 0, \tag{3.5.5}$$

мұнда $\beta_j \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. $\beta_j = \infty$ жағдайы Дирихле шекаралық шартына, яғни $y_j(0) = 0$ шартына сәйкес келеді.

Түбір v төбесінде біз үздіксіздік шарттарын қоямыз:

$$y_j(l_j) = y_k(l_k), \tag{3.5.6}$$

мұнда бұл шарт түбірге жанасатын барлық e_j және e_k қырлары үшін орындалады, сондай-ақ Кирхгоф шартын қоямыз:

$$\sum_j y_j'(l_j) = 0, \tag{3.5.7}$$

мұнда қосынды v төбесіне жанасатын барлық e_j қырлары бойынша алынады.

Қалған барлық ішкі төбелер үшін, яғни кіретін e_j қыры және шығатын e_k қыры бар төбелерде, шарттары мынадай түрде беріледі:

$$y_j(l_j) = y_k(0), \tag{3.5.8}$$

ал Кирхгоф шарты:

$$y_k'(0) = \sum_j y_j'\,(l_j). \qquad (3.5.9)$$

e_j қырында (3.5.1) Штурм–Лиувилль теңдеуінің шешімін $s_j(\lambda, x)$ деп белгілейік, ол

$$s_j(\lambda, 0) = 0, \qquad s_j'(\lambda, 0) - 1 = 0$$

шарттарын қанағаттандырады, ал $c_j(\lambda, x)$ — келесі шарттарды қанағаттандыратын шешім болсын:

$$c_j(\lambda, 0) - 1 = 0, \qquad c_j'(\lambda, 0) = 0.$$

Онда сипаттамалық функция, яғни нөлдері есептің спектрімен дәл келетін бүтін функция, $s_j(\lambda, l_j)$, $s_j'(\lambda, l_j)$, $c_j(\lambda, l_j)$ және $c_j'(\lambda, l_j)$ арқылы өрнектеледі. Осыны іске асыру үшін келесі вектор-функциялар жүйесін енгіземіз:

$$\psi_j(\lambda, x) = \mathrm{col}\{0{,}0, \dots, s_j(\lambda, x), \dots, 0\},$$

$$\psi_{j+n}(\lambda, x) = \mathrm{col}\{0{,}0, \dots, c_j(\lambda, x), \dots, 0\}, \qquad j = 1{,}2, \dots, n,$$

мұнда n — қырлар саны. [29]-дағыдай, (4.2.2)–(4.2.6) шарттарымен туындайтын сызықтық функционалдарды L_j ($j = 1{,}2, \dots, 2n$) деп белгілейік. Сонда

$$\Phi(\lambda^2) = \| L_j\, \psi_k(\lambda, x) \|_{j,k}^{2n}$$

— ішкі төбелердегі үздіксіздік және Кирхгоф шарттарын сипаттайтын сызықтық теңдеулер жүйесіне сәйкес келетін сипаттамалық матрица болады. Осыдан

$$\phi_N(\lambda^2) \coloneqq \det\big(\Phi(\lambda^2)\big)$$

шамасын (3.5.4)–(3.5.5) есептің сипаттамалық функциясы деп атаймыз. Сипаттамалық функция тұрақты көбейткішке дейін бірмәнді анықталады. Ыңғайлылық үшін спектрлік параметр ретінде $z = \lambda^2$ айнымалысын қолданамыз. Сипаттамалық функция келесі теңдікті қанағаттандыратынын оңай көруге болады:

$$\phi_N(\bar{z}) = \overline{\phi_N(z)}.$$

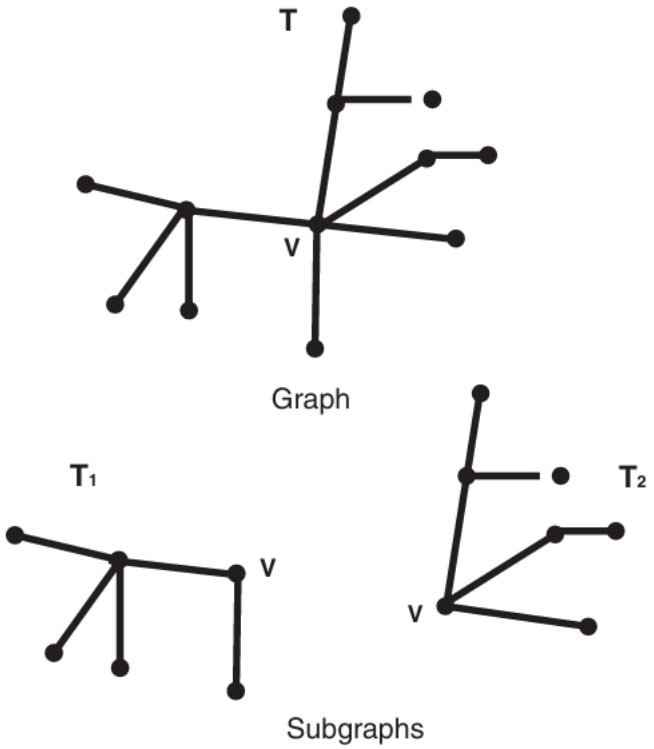
Сондай-ақ біз дәл сол теңдеулермен және сол шекаралық әрі түйістірілу шарттарымен, бірақ v төбесінде (1.2.4) шартының орнына

$$y_j\big(l_j\big) = 0 \qquad (3.5.7')$$

шарты қойылған есепті де қарастырамыз. (3.5.5)–(3.5.6), (3.5.7′), (3.5.8), (3.5.9) есептің осы сипаттамалық функциясын $\phi_D(\lambda^2)$ деп белгілейміз. Егер v ілінген төбе болса, онда (1.2.4) шарты Нейман шекаралық шартымен, ал (1.2.4′) шарты Дирихле шекаралық шартымен дәл келеді. Сонымен қатар $\phi_D(z)$ функциясы да симметрия шартын қанағаттандырады:

$$\phi_D(\bar{z}) = \overline{\phi_D(z)}.$$

Түбір v ішкі төбе болсын деп ұйғарайық. Онда T ағашын ортақ төбесі тек v болатын екі ішкі ағашқа T_1 және T_2 деп бөлеміз. (Бұл жағдайда T_1мен T_2 T ағашының бірін-бірі толықтыратын ішкі ағаштары деп аталады.)



2- Сурет Ішкі ағаштар

Біз ішкі ағаштарда екі Нейман есебін қарастырамыз:

$$-y''_{j,i} + q_{j,i}(x)y_{j,i} = z\,y_{j,i}, q_{j,i} \in L^2[0, l_{j,i}], i = 1,2. \qquad (3.5.10)$$

Ілінген (шеткі) төбеге жанасатын T_iішкі ағашындағы $e_{j,i}$ қыры үшін

$$y'_{j,i}(0) + \beta_{j,i}y_{j,i}(0) = 0. \qquad (3.5.11)$$

T_iішкі ағашының түбірінде барлық жанасатын j және k қырлар үшін үзілісіздік және Кирхгоф шарттары сақталады:

$$y_{j,i}(l_{j,i}) = y_{k,i}(0), \qquad (3.5.12)$$

$$\sum_{j} y'_{j,i}\left(l_{j,i}\right) = 0. \tag{3.5.13}$$

Қалған барлық ішкі төбелер үшін, яғни кіретін $e_{j,i}$ қырлары және шығатын $e_{k,i}$ қыры бар төбелерде, үздіксіздік шарттары

$$y_{j,i}\left(l_{j,i}\right) = y_{k,i}(0), \tag{3.5.14}$$

ал Кирхгоф шарты

$$y'_{k,i}(0) = \sum_{j,i} y'_{j,i}\left(l_{j,i}\right) \tag{3.5.15}$$

түрінде жазылады.

T_1және T_2ішкі ағаштарындағы екі Дирихле есебі келесі түрде беріледі:

$$-y''_{j,i} + q_{j,i}(x)y_{j,i} = \lambda y_{j,i}, q_{j,i} \in L^2\left[0, l_{j,i}\right], i = 1,2. \tag{3.5.16}$$

Ілінген төбеге жанасатын $e_{j,i}$ қыры үшін

$$y'_{j,i}(0) + \beta_{j,i}y_{j,i}(0) = 0 \tag{3.5.17}$$

деп аламыз.

Ішкі ағашының түбірінде

$$y_{j,i}\left(l_{j,i}\right) = 0, \tag{3.5.18}$$

яғни түбірге жанасатын i-бөлікке тиесілі барлық $e_{j,i}$ қырлар үшін осы шарт орындалады.

Қалған барлық ішкі төбелер үшін, яғни кіретін $e_{j,i}$ қырлары және шығатын $e_{k,i}$ қыры бар төбелерде, үздіксіздік шарттары

$$y_{j,i}\left(l_{j,i}\right) = y_{k,i}(0), \tag{3.5.19}$$

ал Кирхгоф шарты

$$y'_{k,i}(0) = \sum_{j,i} y'_{j,i}\left(l_{j,i}\right) \tag{3.5.20}$$

түрінде беріледі.

(3.5.10)–(3.5.15) есептің сипаттамалық функциясын $\phi_N^{(i)}(z)$ деп, ал (3.5.16) – (3.5.20) есептің сипаттамалық функциясын $\phi_D^{(i)}(z)$деп белгілейік. Осы

белгілеулерді қолдана отырып, ағаштың сипаттамалық функциялары үшін келесі қысқарту формулаларын аламыз.

Теорема 3.4. T ағашының түбірі vішкі төбе болсын. T_1 және T_2 — T ағашының бірін-бірі толықтыратын ішкі ағаштары болсын. Жоғарыда сипатталғандай граф пен ішкі ағаштардың қырлары бірдей бағдарланған жағдайда,

$$\phi_N(z) = \phi_N^{(1)}(z)\,\phi_D^{(2)}(z) + \phi_D^{(1)}(z)\,\phi_N^{(2)}(z), \qquad (3.5.21)$$

$$\phi_D(z) = \phi_D^{(1)}(z)\,\phi_D^{(2)}(z).$$

Бұл формулалар бүкіл ағаштағы Нейман және Дирихле есептерінің сипаттамалық функцияларын сәйкес ішкі ағаштардағы сипаттамалық функциялар арқылы өрнектейді.

Салдар 3.2. Түбірі v болатын T ағашының $d(v)$ санына тең бірін-бірі толықтыратын $T_i(i = 1,2,\dots,d(v))$ ішкі ағаштары болсын. T_i үшін Нейман және Дирихле есептерінің сипаттамалық функцияларын тиісінше $\phi_N^{(i)}$ және $\phi_D^{(i)}$ деп белгілейік. Егер v төбесі T_i үшін ілінген (шеткі) төбе болса, онда

$$\phi_N(z) = \sum_{i=1}^{d(v)} \phi_N^{(i)}(z) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{d(v)} \phi_D^{(k)}(z), \qquad (3.5.22)$$

$$\phi_D(z) = \prod_{i=1}^{d(v)} \phi_D^{(i)}(z). \qquad (3.5.23)$$

Теорема 3.4-тің тағы бір қолданылуы $\frac{\phi_D}{\phi_N}$ комплекс функциясының қасиеттерін түсіндіруге қатысты. Ол үшін Неванлинна функциясы ұғымы қажет. Бұл функция R-функция [94] немесе Герлотц функциясы деп те аталады және оның анықтамалары әртүрлі болуы мүмкін. Төменде осы жұмыста қолданылатын анықтама келтіріледі.

Анықтама. Мероморфты $f(z)$функциясы келесі шарттарды қанағаттандырса, Неванлинна функциясы деп аталады:

1. $f(z)$функциясы $\operatorname{Im} z > 0$және $\operatorname{Im} z < 0$ жартыжазықтықтарда аналитикалық;
2. $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$;
3. $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} f(z) \geq 0$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$.

Келесі лемма айқын.

Лемма 3.6. Егер fжәне g Неванлинна функциялары болса, онда $f + g$ және $-\frac{1}{f}$ функциялары да Неванлинна функциялары болып табылады.

Теорема 3.5.

$$\frac{\phi_D(z)}{\phi_N(z)}$$

қатынасы Неванлинна функциясы болып табылады.

4. ГРАФТАРДАҒЫ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЬ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫН ИДЕНТИФИКАЦИЯЛАУДАҒЫ ЭТАЛОНДЫҚ ЕСЕПТЕР ӘДІСІ

4.1. Графтағы Штурм–Лиувилль теңдеуі үшін Коши есебінің қойылымы

Төмендегі нәтиже Г.Боргтың «Штурм-Лиувилль меншікті мәндер есебінің айналымы. Дифференциалдық теңдеуді меншікті мәндер арқылы анықтау» [106] атты белгілі еңбегінде келтірілген. Келесі есептің меншікті мәндері

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), 0 < x < \pi, \tag{4.1.1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{4.1.2}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ деп белгіленеді, мұндағы $q(x)$ — $[0, \pi]$ аралығында үздіксіз нақты мәнді функция, ал h, H — нақты сандар. Дәл осылай, (1) теңдеудің

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{4.1.3}$$

шекаралық шарттарымен берілген есебінің меншікті мәндері $\mu_1, \mu_2, \ldots$ деп белгіленеді, мұндағы $h_1 \neq h$. Сонда $\{\lambda_n\}$ және $\{\mu_n\}$ тізбектері $q(x)$ функциясын және h, h_1, H сандарын бірмәнді түрде анықтайды. Осылайша, Г. Борг екі канондық есептің E_1 және E_2 спектрлерін енгізді. Мұнда:

E_1 — бірінші канондық есеп, ол (1)–(3) арқылы беріледі;

E_2 — екінші канондық есеп, ол (1)–(2) арқылы беріледі.

E_2 канондық есебі қалпына келтірілуі тиіс бастапқы (4.1.1), (4.1.2) есебімен сәйкес келеді. Бұл есепті E_1 және E_2канондық есептерінің спектрлер жиыны бойынша қалпына келтіру қажет.

$\{\lambda_n\}$ және $\{\mu_n\}$ тізбектерінің E_1 және E_2 есептерінің екі спектрі болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттар Б.М Левитан мен М.Г Гасымовтардың еңбектерінде [107] тұжырымдалып, дәлелденген.

О.А Плаксина [3] $[0, \pi]$ аралығында $l = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)$ операциясы және келесі түрдегі ажыратылмаған өзіне-өзі түйіндес шекаралық шарттар арқылы туындайтын операторлар үшін кері есептерді зерттеді:

$$\begin{cases} y'(0) + \beta y(0) + e^{i\alpha} y(\pi) = 0, \\ y'(\pi) - e^{-i\alpha} y(0) + \gamma y(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

мұндағы α, β, γ — нақты сандар. [108]-де E_1, E_2 және E_3 деп аталатын үш канондық есеп енгізілді. Осы канондық есептердің спектрлері бойынша $q(x)$ функциясы мен α, β, γ сандарын анықтауға болады. E_1канондық есебі (1) теңдеумен және келесі ажыратылған шекаралық шарттармен беріледі:

$$y(0) = 0, y'(\pi) + \gamma y(\pi) = 0. \quad (4.1.5)$$

E_2 канондық есебі (1) теңдеуінен және (4.1.4) түріндегі ажыратылмаған шекаралық шарттардан тұрады, бірақ мұнда (4.1.4)-тегі α параметрі α_1-ге ауыстырылады, ал қалған барлық шекаралық коэффициенттер өзгеріссіз қалады. E_3 канондық есебі (4.1.1)–(4.1.4) есебімен сәйкес келеді.

$q(x)$ функциясын және $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1$ сандарын бірмәнді түрде қалпына келтіру үшін E_1, E_2, E_3 канондық есептерінің үш спектрін беру жеткіліксіз екені анықталды. $q(x)$, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1$-ді бірмәнді қалпына келтіру үшін осы үш спектрге қоса $\{\delta_n\}$ таңба тізбектерінің белгілі бір жиынын қосу қажет, мұнда әрбір δ_n не $+1$, не -1-ге тең. [108]-де аталған төрт тізбектің E_1, E_2, E_3 канондық есептерінің үш спектрі болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттар да берілген. Графтардағы дифференциалдық операторлар үшін осыған ұқсас кері спектрлік есептер [109]-да зерттелген.

Жоғарыда аталған канондық есептер спектрлерінің жиыны бойынша қойылатын кері есептермен қатар, тек канондық есептердің шекаралық шарттарын бірмәнді қалпына келтіру мүмкіндігін зерттеу де қызығушылық тудырады. Бұл жағдайда дифференциалдық өрнектегі $q(x)$ коэффициенті бүкіл $[0, \pi]$ аралығында берілген деп ұйғарылады. Мұндай есептер шекаралық шарттарды идентификациялау есептері [110,80] деп аталады. Кейде бұл есепті Штурм–Лиувилл операторының анықталу облысын анықтау есебі деп те атайды, себебі оператордың анықталу облысы әртүрлі, бірақ эквивалентті шекаралық шарттар жиындары арқылы берілуі мүмкін.

Канондық есептердің шекаралық шарттарын идентификациялау есептері, әдетте, шекаралық коэффициенттердің ақырлы санын бірмәнді қалпына келтіруді талап етеді. Borg жағдайында тек үш нақты санды, яғни h, h_1 және H-ты қалпына келтіру керек. Ал Plaksina жағдайында $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1$ сияқты төрт санды қалпына келтіру қажет. Сондықтан шекаралық коэффициенттердің ақырлы санын қалпына келтіру үшін канондық есептердің толық спектрлер жиынын көрсету міндетті емес екені түсінікті. Б.Е Кангужиннің еңбегінде [59] жоғары ретті дифференциалдық операторлар үшін шекаралық шарттарды бірмәнді қалпына келтіру мақсатында әрбір канондық есептен меншікті мәндердің тек ақырлы санын көрсету жеткілікті екені дәлелденген. Осы жұмыста дәл сондай нәтиже жұлдызша графтағы Штурм–Лиувилл операторы үшін дәлелденген. Жұлдызша графтағы Дирак операторлары үшін басқа кері спектрлік есептер [111]-де зерттелген.

Біздің жағдайда ажыратылмаған шекаралық шарттарға ерекше назар аударылған. Қысқаша айтқанда, 5-теорема тек симметриялы жұлдызша граф үшін ғана орындалады. Барлық қабырғаларының ұзындықтары бірдей болатын жұлдызша граф симметриялы жұлдызша деп аталады. Демек, осы бөлімнің негізгі нәтижесі мынада: жұлдызша графтағы екінші ретті дифференциалдық оператордың анықталу облысын бірмәнді қалпына келтіру тек граф симметриялы болған жағдайда ғана мүмкін.

$(m+1)$-ші шыбықтың ұштары бір түйінде серпімді түрде өзара жалғанған болсын. m шыбықтың бос ұштары қандай да бір түрде бекітілген және көзбен бақылауға қолжетімсіз болсын. Бір шыбықтың көрінетін бос ұшын балғамен ұруға болады және осы байланысқан құрылымдардың бойлық тербелістерінің меншікті жиіліктерін өлшеуге болады. Мұнда көзбен бақылауға қолжетімсіз шыбық ұштарының бекітілуін бірмәнді анықтайтын меншікті жиіліктердің ақырлы жиыны бар екені тұжырымдалады. Мұндай есептер акустикалық диагностика мәселелерімен байланысты. $(m+1)$-ші шыбықтың серпімді байланысының математикалық моделі ретінде жұлдызша граф алынады, оның үстінде белгілі бір шекаралық шарттары бар Штурм–Лиувилл операторы анықталған.

Бұл бөлімде арнайы канондық есептердің спектрлер жиыны арқылы жұлдызша графтағы Штурм–Лиувилл операторының анықталу облысын бірмәнді қалпына келтіру мүмкіндігі дәлелденген. Сонымен қатар, шыбық ұштарының бекітілуін бірмәнді қалпына келтіру үшін меншікті жиіліктердің ақырлы саны жеткілікті екені көрсетілген. Бұдан бөлек, шекаралық бекітулерді бірмәнді түрде қалпына келтіру үшін қажет меншікті жиіліктердің жалпы саны $2(m+1)^2$-тен аспайды. [112]-де ажыратылмаған шекаралық шарттары бар шекаралық есептің меншікті мәндерінің ақырлы жиыны бойынша дифференциалдық теңдеулер коэффициенттерін қалпына келтіру мәселесі қарастырылған.

Қатты денелерден тұратын байланысқан құрылымдардағы шекаралық зақымдануды анықтау, денелердің бір-біріне әсері мен тәжірибелік жағдайларға байланысты, әлі де күрделі мәселе болып қалып отыр. Егер байланысқан құрылымның ұштары көзбен тексеруге қолжетімсіз болса, шекаралық зақымдануды анықтау одан сайын қиын болады. Сондықтан осы жұмыста шекаралық зақымдануды анықтау үшін байланысқан құрылымдардың бойлық тербелістерінің меншікті жиіліктері пайдаланылды, себебі мұндай тербеліс жиіліктерін инженерлік датчиктер арқылы өлшеуге болады.

4.2. Графтағы Штурм–Лиувилль теңдеуі үшін Коши есебінің шешімі

Г = {V, E} граф болсын, мұнда V — төбелер жиыны, олар нөлден m + 1-ге дейін нөмірленген, ал E — Г = {V, E} графының $e_1, \dots, e_{m+1}$ қабырғалар жиыны [113]. Әрбір e_j қабырғасында келесі j-ші дифференциалдық теңдеу орындалады:

$$-y_j''(x_j) + p_j(x_j)y_j(x_j) = f_j(x_j), \qquad 0 < x_j < b_j \tag{4.2.1}$$

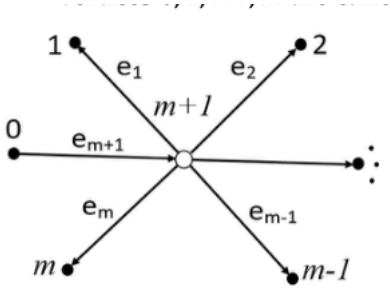
Бұдан әрі $p_j(x)$, $j \geq 1$, функциялары e_j қабырғасында нақты мәнді әрі үздіксіз деп ұйғарылады.

$(m+1) \in V$ төбесі графтың ішкі төбесі деп аталады. Ішкі $(m+1)$ төбесінде Кирхгоф заңдары [114]:

$$\begin{cases} y_{m+1}(b_{m+1}) = y_1(0) = \cdots = y_m(0), \\ y'_{m+1}(b_{m+1}) = y'_1(0) + \cdots + y'_m(0) \end{cases} \quad (4.2.2)$$

орындалады.

$0, 1, \ldots, m$ төбелері графтың шекаралық төбелері деп аталады (1-сурет).



3-сурет – Жұлдыз граф

Шекаралық шарттар жиыны:

$$U_k(y_1, \ldots, y_{m+1}) = \sum_{j=1}^{2} [\alpha_{kj} y_1^{(j-1)}(b_1) + \alpha_{k(2+j)} y_2^{(j-1)}(b_2) + \cdots + \alpha_{k(2m-2+j)} y_m^{(j-1)}(b_m) + \alpha_{k(2m+j)} y_{m+1}^{(j-1)}(0)] = 0 \quad (4.2.3)$$

$\{k \in 0,1, \ldots, m\}$ шекаралық төбелерінде орындалады, мұндағы α_{ks} — комплекс сандар.

Бұдан әрі $c_j(x_j)$, $s_j(x_j)$, $j = 1,2, \ldots, m+1$ функцияларын енгізу ыңғайлы. Бұл функциялар келесі біртекті дифференциалдық теңдеулердің шешімдері:

$$-y_j''(x_j) + p_j(x_j) y_j(x_j) = 0, \qquad 0 < x_j < b_j \quad (4.2.4)$$

және бастапқы шарттары:

$$\begin{cases} c_j(0) = s_j'(0) = 1, c_j'(0) = s_j(0) = 0, j = 1,2, \ldots, m, \\ c_{m+1}(b_{m+1}) = s'_{m+1}(b_{m+1}) = 1, c'_{m+1}(b_{m+1}) = s_{m+1}(b_{m+1}) = 0 \end{cases}$$

әрбір j үшін. Жұлдыз граф ағаш болғандықтан [115], 0-төбеден j-төбеге дейін ($j = 1, \ldots, m$) жалғайтын тек бір ғана жол бар. Бұл жолды

$$S_j = e_{m+1} \cup e_j$$

деп белгілейміз. Көрсетілген S_j жолын $(0, b_{m+1})$ және $(b_{m+1}, b_{m+1} + b_j)$ аралықтарының бірігуі түрінде көрсету ыңғайлы. Келесі дифференциалдық теңдеулерді енгіземіз:

$$-\phi''(x) + q_j(x)\phi_j(x) = F_j(x), x \in (0, b_{m+1}) \cup \left(b_{m+1}, b_{m+1} + b_j\right) \qquad 4.2.5$$

мұндағы $S_j = (0, b_{m+1}) \cup \left(b_{m+1}, b_{m+1} + b_j\right)$, ал

$q_j(x) = p_{m+1}(x)$, $F_j(x) = f_{m+1}(x)$, егер $0 < x < b_{m+1}$,
$q_j(x) = p_j(x)$, $F_j(x) = f_j(x)$, егер $b_{m+1} < x < b_{m+1} + b_j$.

Келесі шартты талап етеміз:

$$\phi_j(b_{m+1} - 0) = \phi_j(b_{m+1} + 0), A_j\phi_j'(b_{m+1} - 0) = \phi_j'(b_{m+1} + 0) \qquad (4.2.6)$$

$x = b_{m+1}$ нүктесінде, мұндағы $\{A_j\}$ — жалғыз талапты қанағаттандыратын еркін тұрақтылар:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_m = 1 \qquad (4.2.7)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ сандары (4.2.7)-ні қанағаттандыратын бекітілген сандар болсын. Сондай-ақ $\phi_j(x)$, $\phi_j'(x)$ функциялары сол жақтан үздіксіз деп ұйғарамыз, яғни

$$\phi_j(b_{m+1} - 0) = \phi_j(b_{m+1}), \phi_j'(b_{m+1} - 0) = \phi_j'(b_{m+1}).$$

$\Phi_j(x)$ және $\Psi_j(x)$ арқылы $F_j(x) \equiv 0$ болғандағы (4.2.5) теңдеудің S_j жолындағы, (4.2.6) шарттарын және мына шарттарды қанағаттандыратын шешімдерін белгілейміз:

$$\Phi_j(b_{m+1} - 0) = \Psi_j'(b_{m+1} - 0) = 1, \Phi_j'(b_{m+1} - 0) = \Psi_j(b_{m+1} - 0) = 0 \quad (4.2.8)$$

(4.2.5) теңдеудің дербес шешімін келесі формуламен енгіземіз:

$$\phi_j(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} \Phi_j(x) & \Psi_j(x) \\ \Phi_j(t) & \Psi_j(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi_j'(t) & \Psi_j'(t) \\ \Phi_j(t) & \Psi_j(t) \end{vmatrix}} F_j(x)\, dt \qquad (4.2.9)$$

мұнда $j \in \{1, \ldots, m\}$, $x \in S_j$. (4.2.9) формуламен анықталған $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ функциялары $x = b_{m+1}$ нүктесінде Кирхгоф шарттарын (7) қанағаттандыратыны айқын. Шынында, былай жазуға болады:

$$\phi_j(x) = \int_0^x \begin{vmatrix} c_{m+1}(x) & s_{m+1}(x) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t)\, dt, \qquad x \in (0, b_{m+1}),$$

$$\phi_j(x+b_{m+1}) = \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} \Phi_j(x+b_{m+1}) & \Psi_j(x+b_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t)\,dt + \int_0^x \begin{vmatrix} c_j(x) & s_j(x) \\ c_j(t) & s_j(t) \end{vmatrix} f_j(t)\,dt, \qquad x \in (0, b_j)$$

$x \in (0, b_{m+1}) \cup (b_{m+1}, b_{m+1} + b_j)$ үшін. Сонымен бірге, $x \in (0, b_j)$ кезінде

$$\Phi_j(x+b_{m+1}) = c_j(x), \Psi_j(x+b_{m+1}) = A_j s_j(x)$$

екені, ал $x \in (0, b_{m+1})$ кезінде

$$\Phi_j(x) = c_{m+1}(x), \Psi_j(x) = s_{m+1}(x)$$

екені орындалады. Осылайша, келесі теореманы тұжырымдаймыз.

Теорема 4.1. (4.2.1) және (4.2.2) Штурм–Лиувилль теңдеулері үшін Коши есебінің шешімін, $x_{m+1} = 0$нүктесіндегі келесі Коши шарттарымен:

$$\theta_{m+1}(0) = 0, \theta'_{m+1}(0) = 0 \qquad (4.2.10)$$
$$\Theta = (\theta_1(x_1), \theta_2(x_2), \dots, \theta_{m+1}(x_{m+1}))$$

деп белгілейік. Сонда ол келесі түрде өрнектеледі:

$$\theta_{m+1}(x_{m+1}) = \int_0^{x_{m+1}} \begin{vmatrix} c_{m+1}(x_{m+1}) & s_{m+1}(x_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t)\,dt, x_{m+1} \in e_{m+1},$$

$$\theta_j(x_j) = \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & A_j s_j(x_j) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t)\,dt + \int_0^{x_j} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & s_j(x_j) \\ c_j(t) & s_j(t) \end{vmatrix} f_j(t)\,dt, x_j \in e_j, \qquad j = 1,2,\dots,m,$$

мұндағы $A_1, A_2, \dots, A_m$ — (12) шартын қанағаттандыратын еркін сандар.

Ескерту 4.1. 1-теоремадан (4.2.1), (4.2.2), (4.2.10) Коши есебінің шешімі еркін $(m-1)$ тұрақтыға тәуелді екені шығады. (12) шартын қанағаттандыратын $A_1, A_2, \dots, A_m$ тұрақтылары $x_{m+1} = b_{m+1}$ нүктесінде $e_1, e_2, \dots, e_m$ қабырғаларындағы ағын үлестерін e_{m+1} қабырғасындағы ағынға қатысты анықтайды. $A_1, A_2, \dots, A_m$ сандарын байланыстырушы тұрақтылар деп атаймыз.

4.3 Берілген шекаралық формалар жүйесі үшін биортогональді шешімдер жүйесін құру

(4.2.3) шекаралық шарттар жиыны $U_0(\cdot), \dots, U_m(\cdot)$ шекаралық формаларымен берілсін. $j = 0,1, \dots, m$ үшін (4.2.2)–(4.2.4) есептің

$$R_j = \left(r_{1j}(x_1), \dots, r_{m+1,j}(x_{m+1})\right)$$

шешімдер жүйесі $U_0(\cdot), \dots, U_m(\cdot)$ шекаралық формаларына биортогональ деп аталады, егер

$$U_k(R_j) = \delta_{kj}, k, j = 0,1, \dots, m \tag{4.3.1}$$

шарты орындалса. Мұндағы δ_{kj} — Кронекер символы.

Бұл бөлімде биортогональ шешімдер жүйесінің бар болуы үшін жеткілікті шарттарды табамыз. Басқаша айтқанда, (4.2.2)–(4.2.4) есептің биортогональ шешімдер жүйесі бар болуы үшін $\{U_k,\ k = 0,1, \dots, m\}$шекаралық формалар жиыны қандай шарттарды қанағаттандыруы керек?

Келесі матрицаны енгіземіз:

$$T = \begin{bmatrix} U_0(c_1, c_2, \dots, c_{m+1}) & U_0^1(s_1) & U_0^2(s_2) & \cdots & U_0^m(s_m) & U_0^{m+1}(s_{m+1}) \\ U_1(c_1, c_2, \dots, c_{m+1}) & U_1^1(s_1) & U_1^2(s_2) & \cdots & U_1^m(s_m) & U_1^{m+1}(s_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_m(c_1, c_2, \dots, c_{m+1}) & U_m^1(s_1) & U_m^2(s_2) & \cdots & U_m^m(s_m) & U_m^{m+1}(s_{m+1}) \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

мұнда

$$U_i^k(s_k) = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{i(2k-2+j)}\ s_k^{(j-1)}(b_k), k \geq 1,\ i \geq 0,$$

$$U_i^{m+1}(s_{m+1}) = \sum\nolimits_{j=1}^{2} \alpha_{i(2m+j)}\ s_{m+1}^{(j-1)}(0) \tag{4.3.2}$$

Теорема 4.2. Егер $U_0(\cdot), \dots, U_m(\cdot)$ шекаралық формалар жиыны үшін

$$\det T \neq 0$$

болса, онда $\{U_0, \dots, U_m\}$ формаларына биортогональ болатын (4.2.2)–(4.2.4) есептің бірмәнді шешімдер жүйесі бар.

Теорема 4.2-нің дәлелдеуі. (4.2.2) Кирхгоф шарты орындалатын, (4.2.4) біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін жалпы шешімін жазайық:

$$y_{m+1}(x_{m+1}) = Dc_{m+1}(x_{m+1}) + Es_{m+1}(x_{m+1}),\quad x \in e_{m+1}, \tag{4.3.3}$$

$$y_j(x_j) = Dc_j(x_j) + EA_1 s_j(x_j),\ \ x \in e_j,\ \ j = 1, \dots, m. \tag{4.3.4}$$

Мұнда D, E және $A_1, \dots, A_m$— (4.2.7) шартын қанағаттандыратын сандар. Енді келесі теңдіктерді қанағаттандыратын R бар екенін дәлелдейік:

$$U_0(R) = 1,\ U_1(R) = 0, \dots, U_m(R) = 0. \tag{4.3.5}$$

Біз $R = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_{m+1}(x))$ функциясын (4.3.3) және (4.3.4) түрінде іздейміз. (4.3.3) және (4.3.4) өрнектерін (4.3.5) теңдіктеріне қойсақ, $D, E, A_1E, A_2E, \dots, A_mE$ айнымалыларына қатысты алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$Tz = l_1, \tag{4.3.6}$$

Мұндағы

$$z = [D, A_1E, A_2E, \dots, A_mE, E]^T, l_1 = [1,0,0, \dots,0]^T.$$

$\det T \neq 0$ болғандықтан, $E, A_1, A_2, \dots, A_m, D$ шамалары (4.3.6) жүйеден бірмәнді түрде табылады. Демек, $R_0(16)$ шарттарынан $j = 0$ үшін бірмәнді анықталады. Сол сияқты, $R_1, R_2, \dots, R_m$ да $j \geq 1$ үшін (4.3.1) шарттарынан бірмәнді анықталатыны тексеріледі. Теорема 4.2 дәлелденді.

4.4 Берілген шекаралық формалар жүйесі үшін эквивалентті интегралдық түрдегі формалар жиынтығын құру

Бұл бөлімде (4.2.3)-тегі $\{U_0, \dots, U_m\}$ шекаралық формалар жиынының орнына оған эквивалентті $\{W_0, \dots, W_m\}$ жиыны алынады. $A_m = 1 - A_1 - \dots - A_{m-1}$ деп алайық, ал $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$— сандар болсын. $\{W_0, \dots, W_m\}$ шекаралық формаларының айқын түрін көрсету үшін келесі функцияларды енгіземіз:

$$\rho_k^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^{m} r_{m+1,i}(0) \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix},\ t \in e_k,\ k \leq m,$$

$$\rho_{m+1}^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^{m} r_{m+1,i}(0) \begin{vmatrix} U_i^{m+1}(c_{m+1}) & U_i^{m+1}(s_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} U_i^i(c_i) & A_i U_i^i(s_i) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix}, \qquad t \in e_{m+1}$$

$$\rho_k^{(2)}(t) = \sum_{i=0}^{m} r'_{m+1i}(0) \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix}, \qquad t \in e_k,\ k \leq m$$

$$\rho_{m+1}^{(2)}(t) = \sum_{i=0}^{m} r'_{m+1i}(0) \begin{vmatrix} U_i^{m+1}(c_{m+1}) & U_i^{m+1}(s_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} U_i^i(c_i) & A_i U_i^i(s_i) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix}, \qquad t \in e_{m+1},$$

$$\rho_k^{(j+2)}(t) = \sum_{i=0}^{m} (r'_{ji}(0) - A_j r'_{m+1i}(b_{m+1})) \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix} \quad t \in e_{m+1},\ k \le m.$$

$$cc\rho_{m+1}^{(j+2)}(t) = \sum_{i=0}^{m} (r'_{ji}(0) - A_j r'_{m+1i}(b_{m+1})) \left(\begin{vmatrix} U_i^{m+1}(c_{m+1}) & U_i^{m+1}(s_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} U_i^i(c_i) & A_i U_i^i(s_i) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix}, \qquad t \in e_{m+1} \qquad (4.4.1)$$

Енді жаңа шекаралық формаларды келесі формулалар арқылы анықтаймыз:

$$W_0(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = y_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(1)}(t)(-y_k''(t) + p_k(t)y_k(t))\, dt,$$

$$W_1(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = y'_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(2)}(t)(-y_k''(t) + p_k(t)y_k(t))\, dt,$$

$$W_{j+1}(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1})$$

$$+ \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(j+2)}(t)\big(-y_k''(t) + p_k(t)y_k(t)\big)\, dt, \qquad j = 1, \dots, m-1.$$

Теорема 4.3. (4.2.1)–(4.2.3) есебі $Y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_{m+1}(x))$түріндегі жалғыз шешімге ие болсын. Онда (4.2.3) шекаралық шарттар жиыны келесі шекаралық шарттарға эквивалент:

$$W_k(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = 0, k = 0,1, \dots, m. \qquad (4.4.2)$$

Теорема 4.1 арқылы анықталған [59] шекаралық шарттар канондық шекаралық шарттар немесе нормаланған шекаралық шарттар деп аталады. Сондықтан (4.2.3) шарттарды қалпына келтірудің орнына, (4.4.2) шарттары қалпына келеді.

Ескерту 4.2. Белгіленген $k \in \{1, \dots, m+1\}$ үшін $\rho_k^{(j)}(t)$функциялары e_kқабырғасында анықталған және (4.2.4) біртекті теңдеудің шешімі болады.

Теорема 4.3-тің дәлелдеуі. Теорема 1 бойынша Коши есебінің шешімін келесі түрде анықтаймыз:

$$\theta_j(x_j) = \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & A_j s_j(x_j) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t)\, dt$$

$$+ \int_0^{x_j} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & A_j s_j(x_j) \\ c_j(t) & s_j(t) \end{vmatrix} f_j(t)\, dt, x_j \in e_j, \quad j = 1,2, \dots, m,$$

$$\theta_{m+1}(x_{m+1}) = \int_0^{x_{m+1}} \begin{vmatrix} c_{m+1}(x_{m+1}) & s_{m+1}(x_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t)\, dt, x_{m+1} \in e_{m+1} \tag{4.4.3}$$

Тікелей тексеру арқылы келесі функциялардың

$$\vartheta_j(x_j) = \theta_j(x_j) - \sum_{i=0}^{m} U_i(\theta)\, r_{ji}(x_j), \qquad j = 1,2, \dots, m+1 \tag{4.4.4}$$

(4.2.3) шекаралық шартты қанағаттандыратынын көруге болады. $V = (\vartheta_1(x_1), \dots, \vartheta_{m+1}(x_{m+1}))$ деп белгілейік.

Шынында, $U_i(Y) = \sum_{k=1}^{m+1} U_i^k(y_k)$ теңдігі мынадай нәтижеге әкеледі:

$$\sum_{j=1}^{m+1} U_0^j(\vartheta_j) = \sum_{j=1}^{m+1} U_0^j(\theta_j) - \sum_{i=0}^{m} U_0(\theta) \sum_{j=1}^{m+1} U_0^j(r_{ji}).$$

$U_i^k(y_k)$ шамасы (4.3.2)-дегідей анықталады. Сондықтан (4.3.1)-ден:

$$U_0(V) = U_0(\theta) - \sum_{i=0}^{m} U_i(\theta) U_0(R_i) = 0,$$

яғни (4.2.3) шекаралық шарттардың орындалатыны дәлелденеді. V— (4.2.1)–(4.2.3) есебінің шешімі екені де оңай көрінеді. Осы есептің шешімінің жалғыздығы мынаны білдіреді:

$$Y = V \text{ немесе } y_j(x_j) = \vartheta_j(x_j), \qquad j = 1,2, \dots, m+1. \tag{4.4.5}$$

(4.4.4) және (4.4.5) формулаларынан келесі өрнектер шығады:

$$\theta_j(x_j) = y_j(x_j) + \sum_{i=0}^{m} U_i\,(\Theta)\, r_{ji}(x_j), \qquad j = 1,2,\dots,m+1. \tag{4.4.6}$$

өйткені Θ келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$\theta_{m+1}(0) = 0, \theta'_{m+1}(0) = 0, \theta'_j(0) - A_j\theta'_{m+1}(b_{m+1}) = 0, j = 1,\dots,m-1. \tag{4.4.7}$$

(4.4.6) қатынасының оң жағындағы өрнектерді (4.4.7) шарттарына қойсақ, келесіні аламыз:

$$y_{m+1}(0) + \sum_{i=0}^{m} U_i\,(\Theta)\, r_{m+1,i}(0) = 0,$$

$$y'_{m+1}(0) + \sum_{i=0}^{m} U_i\,(\Theta)\, r'_{m+1,i}(0) = 0,$$

$$y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \sum_{i=0}^{m} U_i\,(\Theta)\left(r'_{j,i}(0) - A_j r'_{m+1,i}(b_{m+1})\right) = 0,$$

$$j = 1,\dots,m-1 \tag{4.4.8}$$

Енді (4.4.3)-ті қолдана отырып, $U_0(\Theta),\dots,U_m(\Theta)$ мәндерін есептейміз. Нәтижесінде:

$$U_i(\Theta) = \sum_{k=1}^{m+1} U_i^k\,(\Theta_k) = \sum_{k=1}^{m} \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t)\,dt$$

$$+ \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix} f_k(t)\,dt, \qquad i = 0,1,\dots,m. \tag{4.4.9}$$

(4.4.9) қатынасының оң жағын (4.4.8) теңдіктеріне қойсақ, онда:

$$\begin{cases} y_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(1)}(t) f_k(t)\, dt = 0, \\ y'_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(2)}(t) f_k(t)\, dt = 0, \\ y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(j+2)}(t) f_k(t)\, dt = 0, j = 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (4.4.10)$$

k ≥ 1үшін $f_k(t) = -y_k''(t) + p_k(t) y_k(t)$ болғандықтан, (4.4.10) теңдіктері Теорема 4.3-тің дәлелденетінін көрсетеді.

4.5. Канондық есептерді таңдау және кері есептің қойылуы

Бұл бөлімде канондық есептерді таңдау әдісі қарастырылады, олардың спектрлері бастапқы шекаралық есептің немесе оған эквивалент шекаралық шарттардың шекаралық шарттарын бірмәнді анықтауға мүмкіндік береді. Сондықтан келесі функцияларды анықтау жеткілікті:

$$\left\{\rho_k^{(j)}(t), \quad k = 1, \dots, m+1, \quad j = 1, \dots, m+2\right\}$$

канондық есептердің спектрлері арқылы. Шындығында, шекаралық коэффициенттерді табу үшін көмекші канондық есептің толық спектрі емес, тек оның шекті бөлігі ғана қолданылады.

Көмекші канондық есептердің саны граф-жұлдыздың қабырғалары санына тең. Сондықтан біз $(m+1)$ канондық есеп құрамыз. Бірінші канондық есеп ретінде (4.2.1) және (4.2.2) есептерін келесі шекаралық шарттармен аламыз:

$$\begin{gathered} W_0(y) = 0, y'_{m+1}(0) = 0 \\ y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) = 0, j = 1, \dots, m-1. \end{gathered} \quad (4.5.1)$$

Екінші канондық есеп ретінде (4.2.1) және (4.2.2) есептерін келесі шекаралық шарттармен аламыз:

$$\begin{gathered} W_0(y) = 0, W_1(y) = 0, \\ y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) = 0, j = 1, \dots, m-1. \end{gathered} \quad (4.5.2)$$

Осылайша 3-ші, 4-ші, ..., $(m+1)$-ші канондық есептер де анықталады. $(m+1)$-ші канондық есеп ретінде (4.2.1), (4.2.2) және (4.4.2) есептері алынады, ол (4.2.1)–(4.2.3) есебіне эквивалент.

Енді шекаралық шарттарды қалпына келтіру есебінің қойылуын нақтылаймыз.

Бірінші кері есептің қойылуы:

Берілген (4.2.1) дифференциалдық теңдеу және бірінші канондық есептің спектрі бойынша $\left\{\rho_k^{(1)}(t), k = 1, \dots, m+1\right\}$ бірінші шекаралық вектор-функцияны бірмәнді қалпына келтіру қажет.

Екінші кері есептің қойылуы:

Берілген (4.2.1) теңдеу, $\left\{\rho_k^{(1)}(t)\right\}$ және екінші канондық есептің спектрі бойынша $\left\{\rho_k^{(2)}(t), k = 1, \dots, m+1\right\}$ екінші шекаралық вектор-функцияны бірмәнді қалпына келтіру қажет.

Осыған ұқсас түрде 3-ші, 4-ші, ..., m-ші кері есептер қойылады.

$(m+1)$-ші кері есептің қойылуы:

Берілген (4.2.1) теңдеу, $\{\rho_k^{(1)}(t)\}, \dots, \{\rho_k^{(m)}(t)\}, k = 1, \dots, m+1$ және $(m+1)$-ші канондық есептің спектрі бойынша $\left\{\rho_k^{(m+1)}(t), k = 1, \dots, m+1\right\}$ $(m+1)$-ші шекаралық вектор-функцияны бірмәнді қалпына келтіру қажет.

4.6. Шекаралық функцияларды қалпына келтірудің бірмәнділік туралы теоремасы

(4.2.3)-тегі шекаралық шарттардан оларға эквивалентті канондық шекаралық формаларға көшу

$$\left\{\rho_k^{(1)}(t), k = 1, \dots, m+1\right\}, \dots, \left\{\rho_k^{(m+1)}(t), k = 1, \dots, m+1\right\}$$

шекаралық вектор-функцияларын қалпына келтірудің бірмәнділік теоремасын дәлелдеуге мүмкіндік береді. Әрі қарай s-ші канондық есеп E_s есебі деп аталады. $\tilde{E}_s$ деп E_s типтес, бірақ (4.2.1)-дегі теңдеуі бірдей, ал (4.2.2)-дегі шекаралық шарттарының параметрлері басқа болатын есепті белгілейміз. Бұдан әрі, егер қандай да бір таңба E_s есебіне қатысты объектіні білдірсе, онда дәл сол таңбаның үстіндегі “тильда” $\tilde{E}_s$ есебінің сәйкес объектісін білдіреді.

Теорема 4.4. s бүтін санын $\{1, \dots, m+1\}$ жиынынан бекітейік. E_s және $\tilde{E}_s$ есептерінің спектрлері бірдей болсын. Егер

$$\rho_k^{(1)}(t) = \tilde{\rho}_k^{(1)}(t), \dots, \rho_k^{(s-1)}(t) = \tilde{\rho}_k^{(s-1)}(t), k = 1, \dots, m+1$$

$L_2(\Г)$ кеңістігінде орындалса және E_s пен $\tilde{E}_s$ есептерінің түбірлес функциялар жүйелері $L_2(\Г)$ кеңістігінде толық болса, онда

$$\rho_k^{(s)}(t) = \tilde{\rho}_k^{(s)}(t)$$

$L_2(\Г)$ кеңістігінде орындалады.

[116]-ға сәйкес, Г графында табиғи түрде метрикалық топология мен Лебег өлшемін енгіземіз. $L_2(\Г)$кеңістігі осы өлшемге қатысты L_2-кеңістік ретінде түсініледі. Басқаша айтқанда, $L_2(\Г)$-де скаляр көбейтінді мына формуламен енгізіледі:

$$(y,z) = \sum_{j=1}^{m+1}(y_j, z_j) = \sum_{j=1}^{m+1}\int_0^{b_j} y_j\,(x_j)z_j(x_j)\,dx_j, y, z \in L_2(\Г). \qquad (4.6.1)$$

Сонда (4.6.1)-ге сәйкес, (4.4.10) шарттары мына түрде жазылады:

$$\begin{cases} y_{m+1}(0) + \langle \rho^{(1)}, f\rangle = 0, \\ y'_{m+1}(0) + \langle \rho^{(2)}, f\rangle = 0, \\ y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \langle \rho^{(j+2)}, f\rangle = 0, j = 1, \dots, m-1, \end{cases}$$

мұнда

$$\rho^{(1)} = (\rho_1^{(1)}, \dots, \rho_{m+1}^{(j)}) \in L_2(\Г),$$
$$f = (f_1, \dots, f_{m+1}) \in L_2(\Г).$$

Мұнда $f_t = -y_j''(t) + p_j(t)y_j(t), \quad j = 1, \dots, m+1,$ екенін ескереміз. Осылайша, біздің белгілеуіміз бойынша:

$$\begin{cases} W_0(y) = y_{m+1}(0) + \langle \rho^{(1)}, -y'' + py\rangle, \\ W_1(y) = y'_{m+1}(0) + \langle \rho^{(2)}, -y'' + py\rangle, \\ W_{j+1}(y) = y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \langle \rho^{(j+2)}, -y'' + py\rangle, j = 1, \dots, m-1, \end{cases} \qquad (4.6.2)$$

мұнда $py = (p_1y_1, p_2y_2, \dots, p_{m+1}y_{m+1})$.

Теорема 4.4-тің $s = 1$ жағдайы үшін дәлелдеуі

$u^{(1)} = (u_1^{(1)}(x_1), u_2^{(1)}(x_2), \dots, u_{m+1}^{(1)}(x_{m+1}))$ арқылы келесі Коши есебінің шешімін белгілейік:

$$-\frac{d^2}{dx_j^2}u_j^{(1)}(x_j) + p_j(x_j)u_j^{(1)}(x_j) = \lambda u_j^{(1)}(x_j), x_j \in (0, b_j), j = 1, \dots, m+1,$$

$$u_{m+1}^{(1)}(0) = 1,$$

$$\frac{du_{m+1}^{(1)}}{dx_{m+1}}(0) = 0,$$

$$\frac{du_k^{(1)}(x_k)}{dx_k}\,|_{x_k=0} - A_k \frac{du_{m+1}^{(1)}(x_{m+1})}{dx_{m+1}}\,|_{x_{m+1}=b_{m+1}} = 0, k = 1, \dots, m-1.$$

$u_j^{(1)}(x_j, \lambda)$ функциялары λ параметріне қатысты бүтін функциялар екенін атап өтеміз, себебі Теорема 4.1 бойынша Коши есебі барлық комплекс λ үшін бірмәнді шешіледі. Енді $\lambda = \lambda^{(1)}$ — E_1 есебінің кез келген меншікті мәні болсын. Онда

$$u^{(1)}(\lambda^{(1)}) = (u_1^{(1)}(x_1, \lambda^{(1)}), u_2^{(1)}(x_2, \lambda^{(1)}), \dots, u_{m+1}^{(1)}(x_{m+1}, \lambda^{(1)}))$$

$\lambda^{(1)}$ меншікті мәніне сәйкес келетін E_1 есебінің меншікті функциясы болады. E_1 есебінің бірінші шекаралық шарты мына түрде болады:

$$W_0(u_1(\lambda^{(1)})) = u_{m+1}^{(1)}(0, \lambda^{(1)}) + \lambda^{(1)}\langle \rho^{(1)}, u^{(1)}(\lambda^{(1)})\rangle = 0.$$

Осыдан

$$\langle \rho^{(1)}, u^{(1)}(\lambda^{(1)})\rangle = -\frac{1}{\lambda^{(1)}}$$

екені шығады.

Демек, E_1 есебінің меншікті мәндері $\rho^{(1)}$функциясының E_1 есебіне түйіндес түбірлік функциялар жүйесіндегі Фурье коэффициенттерін анықтайды. E_1 есебінің түбірлік функциялар жүйесі L_2(Г)кеңістігінде толық болғандықтан, түйіндес есептің түбірлік функциялар жүйесі де L_2(Г)-де толық болады. Сондықтан, егер E_s және $\tilde{E}_s$есептерінің спектрлері бірдей болса, онда L_2(Г) кеңістігінің бір толық жүйесі бойынша $\rho^{(1)}$ және $\tilde{\rho}^{(1)}$функцияларының Фурье коэффициенттері де бірдей болады. Олай болса, L_2(Г) кеңістігінде $\rho^{(1)}$және $\tilde{\rho}^{(1)}$ функциялары беттеседі. Бұл дәлелдеу E_s және $\tilde{E}_s$ есептерінің жай меншікті мәндері жағдайына сәйкес келеді. Көп еселі меншікті мәндер жағдайында пайымдауды аздап түрлендіру қажет.

Теорема 4.4-тің $s = 2$жағдайы үшін дәлелдеуі

$u^{(2)} = (u_1^{(2)}(x_1), u_2^{(2)}(x_2), \dots, u_{m+1}^{(2)}(x_{m+1}))$ арқылы келесі Коши есебінің шешімін белгілейік:

$$-\frac{d^2}{dx_j^2}u_j^{(2)}(x_j) + p_j(x_j)u_j^{(2)}(x_j) = \lambda u_j^{(2)}(x_j), x_j \in (0, b_j), j = 1, \dots, m+1,$$

$$W_0(u^{(2)}) = 0,$$

$$\frac{du_{m+1}^{(2)}}{dx_{m+1}}(0) = 0,$$

$$\frac{du_k^{(2)}(x_k)}{dx_k}\,|_{x_k=0} - A_k \frac{du_{m+1}^{(2)}(x_{m+1})}{dx_{m+1}}\,|_{x_{m+1}=b_{m+1}} = 0, k = 1, \dots, m-1.$$

$\lambda = \lambda^{(2)}$—E_2 есебінің кез келген меншікті мәні болсын. Онда

$$u^{(2)}(\lambda^{(2)}) = (u_1^{(2)}(x_1, \lambda^{(2)}), u_2^{(2)}(x_2, \lambda^{(2)}), \dots, u_{m+1}^{(2)}(x_{m+1}, \lambda^{(2)}))$$

$\lambda^{(2)}$ меншікті мәніне сәйкес келетін E_2 есебінің меншікті функциясы болады.

E_2 есебінің екінші шекаралық шартын мына түрде көрсетуге болады:

$$W_1(u^{(2)}(\lambda^{(2)})) = \frac{d}{dx_{m+1}} u_{m+1}^{(2)}(x_{m+1}, \lambda^{(2)})\,|_{x_{m+1}=0} + \lambda^{(2)}\langle \rho^{(2)}, u^{(2)}(\lambda^{(2)})\rangle = 0.$$

Осыдан

$$\langle \rho^{(2)}, u^{(2)}(\lambda^{(2)})\rangle = -\frac{1}{\lambda^{(2)}}$$

екені шығады.

Одан кейінгі пайымдаулар Теорема 4.4-тің $s = 1$ жағдайындағы дәлелдеуді қайталайды. E_1 және E_2есептерінің ортақ меншікті мәндері болатын жағдай пайымдауды аздап өзгерту қажеттігін туғызады. Теорема 4.4-тің басқа s мәндері үшін дәлелдеулер де осыларға ұқсас. Теорема 4.4 дәлелденді.

4.7. Шекаралық есептер жағдайындағы бірмәнділік теоремасын нақтылау

Осы тараудың 4-бөлімінде біз $\rho_k^{(j)}(x_k)$ функцияларын $j, k = 1, \dots, m+1$ үшін

$$\{U_i^k(c_k), U_i^k(s_k),\ k = 1, \dots, m+1,\ i = 1, \dots, m+1\}$$

шекаралық формаларының мәндерімен байланыстыратын (4.4.1) формуланы келтірдік. (4.4.1) формуладан $\rho_k^{(j)}(x_k)$ функцияларының барлығы, яғни $j = 1, \dots, m+1$үшін, мына біртекті теңдеулердің шешімдері болатыны шығады:

$$-y_k''(x_k) + p_k(x_k)y_k(x_k) = 0, k = 1, \dots, m+1.$$

$p_1(x_1), \dots, p_{m+1}(x_{m+1})$ коэффициенттері берілген болғандықтан, $\{c_k(x_k), s_k(x_k),\ k = 1, \dots, m+1\}$ шешімдері де белгілі болады. j-ні $\{1, \dots, m+1\}$ жиынынан бекітейік.

Енді

$$\rho_k^{(j)}(x_k) = h_{1k}^{(j)} c_k(x_k) + h_{2k}^{(j)} s_k(x_k), x_k \in (0, b_k), k = 1, \dots, m+1$$

деп алайық, мұндағы $h_{1k}^{(j)}, h_{2k}^{(j)}$— белгісіз тұрақтылар.

Осы тараудың 6-бөлімінде $\rho^{(j)}$ шекаралық функциясының Фурье коэффициенттері мен E_j есебінің берілген меншікті мәндерінің арасындағы байланыс көрсетілген еді. Еске түсірейік:

$$\langle \rho^{(j)}, u^{(j)}(\lambda^{(j)}) \rangle = -\frac{1}{\lambda^{(j)}},$$

Мұнда $u^{(j)}(\lambda^{(j)})$—E_j есебінің $\lambda^{(j)}$ меншікті мәніне сәйкес меншікті функциясы.

Осыдан белгісіз

$$h_{11}^{(j)}, h_{12}^{(j)}, h_{1,m+1}^{(j)}, h_{21}^{(j)}, \dots, h_{2,m+1}^{(j)}$$

тұрақтылары үшін мынадай теңдеулер жүйесі шығады:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \left(h_{1k}^{(j)} \int_0^b c_k(x_k) u_k^{(j)}(x_k, \lambda^{(j)}) + h_{2k}^{(j)} \int_0^b s_k(x_k) u_k^{(j)}(x_k, \lambda^{(j)}) \right) = -\frac{1}{\lambda^{(j)}}.$$

Демек, белгісіз

$$h_{11}^{(j)}, h_{12}^{(j)}, h_{1,m+1}^{(j)}, h_{21}^{(j)}, \dots, h_{2,m+1}^{(j)}$$

тұрақтыларын бірмәнді анықтау үшін E_j есебінің

$$\left\{ \lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \dots, \lambda_{2m+2}^{(j)} \right\}$$

меншікті мәндерін $Z = (Z_{ij})$ анықтауышы нөлден өзгеше болатындай етіп таңдап алу жеткілікті, мұндағы:

$$Z_{k,l+m+1} = \int_0^{b_l} s_l(x_l) u^{(j)}(x_l, \lambda_k^{(j)})\, dx_l,$$

$$Z_{kl} = \int_0^{b_l} c_l(x_l) u^{(j)}(x_l, \lambda_k^{(j)})\, dx_l, l = 1, \dots, m+1, k = 1, \dots, 2m+2.$$

Мұнда $u^{(j)}(\lambda_1^{(j)}), \dots, u^{(j)}(\lambda_{2m+2}^{(j)})$ — таңдап алынған меншікті мәндерге сәйкес E_jесебінің меншікті функциялары.

Лемма 4.1

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{m+1} = b$$

болсын. Сонымен бірге, дифференциалдық өрнектердің $p_1(x), \dots, p_{m+1}(x)$ коэффициенттері

$$\{c_1(x), s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$$

функциялар жүйесі $[0, b]$ аралығында сызықтық тәуелсіз болатындай етіп таңдалсын.E_jесебінің шексіз көп меншікті мәндері бар болсын. Онда E_j есебінің меншікті мәндерінің ішінде Z анықтауышы нөлден өзгеше болатын

$$\left\{\lambda_n^{(j)},\ n = n_1, \dots, n_{2m+2}\right\}$$

жиыны табылады. Мұнда

$$\lambda_1^{(j)} = \lambda_{n_1}^{(j)}, \dots, \lambda_{2m+2}^{(j)} = \lambda_{n_{2m+2}}^{(j)}$$

E_jканондық есебінің кейбір меншікті мәндері.

Лемма4.1-дің дәлелдеуі

Қайшылық арқылы дәлелдейміз. Кез келген

$$\left\{\lambda_n^{(j)},\ n = n_1, \dots, n_{2m+2}\right\}$$

мәндері үшін $Z = 0$ болсын деп ұйғарайық. $n_1 = 1, \dots, n_{2m+1} = 2m + 1$ деп алайық. E_j есебінің шексіз көп меншікті мәндері бар болғандықтан,$n = n_{2m+2}$ болғанда $\lambda_n^{(j)}$ осы есептің бүкіл спектрі бойынша жүгіріп өтсін деп ұйғарамыз.

$Z = 0$ болғандықтан, біртекті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі

$$Z\vec{h} = 0$$

нөлден өзге шешімге ие болады, мұндағы

$$\vec{h} = [h_{11}^{(j)}, \dots, h_{1,m+1}^{(j)}, h_{21}^{(j)}, \dots, h_{2,m+1}^{(j)}].$$

$h_{11}^{(j)} \neq 0$ деп ұйғарайық. Сонда $c_1(x)$ функциясының Фурье коэффициенттері

$$\{s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$$

функцияларының Фурье коэффициенттері арқылы сызықтық түрде өрнектеледі.

Егер $c_1(x)$ функциясының барлық Фурье коэффициенттері жоғарыдағы функциялар жүйесінің Фурье коэффициенттері арқылы сызықтық өрнектелсе, онда

$$\{c_1(x), s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$$

жүйесі сызықтық тәуелді болады. Бұл қайшылыққа әкеледі.

Егер $h_{11}^{(j)} \neq 0$ шарты орындалмаса, онда дәлелдеуде аздаған өзгеріс қажет болады. Лемма дәлелденді.

Лемма 4.1 мен Теорема 4.4-тен келесі теорема шығады.

Теорема 4.5 j-ні $\{1, \dots, m+1\}$ жиынынан бекітейік.

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{m+1} = b$$

болсын. Дифференциалдық өрнектердің $p_1(x), \dots, p_{m+1}(x)$ коэффициенттері

$$\{c_1(x), s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$$

функциялар жүйесі $[0, b]$ аралығында сызықтық тәуелсіз болатындай етіп таңдалсын. Лемма 4.1-дегі E_j және $\tilde{E}_j$ есептерінің ақырлы меншікті мәндер жиындары өзара сәйкес келсін.

Егер

$$\rho^{(1)} = \tilde{\rho}^{(1)}, \dots, \rho^{(j-1)} = \tilde{\rho}^{(j-1)}$$

$L_2(\Gamma)$ кеңістігінде орындалса, онда

$$\rho^{(j)} = \tilde{\rho}^{(j)}$$

$L_2(\Gamma)$ кеңістігінде де орындалады.

Теорема 4.4-тің дәлелдеуінде E_j және $\tilde{E}_j$ есептерінің сәйкес меншікті мәндері бірдей болса, онда олардың меншікті функциялары да бірдей болатыны анықталды. Бұл факт Теорема 4.5-ті дәлелдеуде маңызды рөл атқарады.

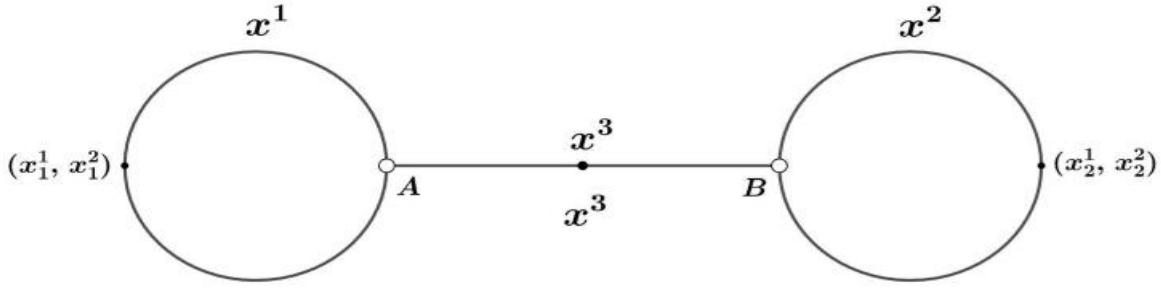
Соңында, мұнда келтірілген кейбір құрылымдарды [110,80]-нен табуға болатынын атап өтейік. [117]-де шекаралық бекітулері әртүрлі, бірақ көлденең тербелістердің шексіз көп бірдей меншікті жиіліктеріне ие біртекті арқалықтардың мысалдары берілген. Теорема 4.5-те шекаралық бекітулерді бірмәнді қалпына келтіру үшін меншікті жиіліктердің ақырлы саны жеткілікті екені айтылды. Бұл [117]-тегі нәтижелерге қайшы келмейді, себебі Теорема 4.5-те арқалықтың шекаралық бекітулерін бірмәнді қалпына келтіру үшін меншікті жиіліктер арнайы таңдалып алынуы тиіс екені көрсетілген.

5 ЛАПЛАС-БЕЛЬТРАМИ ОПЕРАТОРЫ ҮШІН ОЙЫЛҒАН ШЕҢБЕРЛЕР МЕН СЕГМЕНТТЕРДЕН ТҰРАТЫН СТРАТИФИКАЦИЯЛАНҒАН ЖИЫНТЫҚТАҒЫ ДҰРЫС ҚОЙЫЛҒАН ЕСЕПТЕР.

Бұл тарауда екі ойылған шеңбер мен интервалдан тұратын стратификацияланған жиынтықтағы Лаплас-Белтрами операторы зерттеледі. Мұндай жиынтықтағы Лаплас-Белтрами операторы үшін барлық дұрыс қойылған шеттік есептерінің толық сипаттамасы берілген. Тараудың екінші бөлімінде көрсетілген стратификацияланған жиынтықтағы Лаплас-Белтрами операторы үшін түйіндес дұрыс қойылған есептердің класы анықталған. Алынған нәтижелерді геометриялық графтардағы белгілі нәтижелердің жалпыламасы ретінде қарастыруға болады. Атап айтқанда, қарастырылып отырған стратификацияланған жиынды циклдары бар графтар ретінде түсіндіруге болады. Шекті интервалға гомотопиялық жазықтық қисықтарындағы Штурм-Лиувилл операторларының спектрлік асимптотикасын зерттеу де осы тараудың нәтижелерімен тығыз байланысты. Ойылған шеңбер шекті интервалға диффеоморфты болғандықтан, шекті интервалдағы дифференциалдық операторларға қолданылатын спектрлік әдістерді ойылған шеңбердегі дифференциалдық операторлардың спектрлік қасиеттерін зерттеу үшін өзгертуге болады. Бұл жұмыстың негізгі нәтижелері шекті аралықтағы Штурм-Лиувилл операторының меншікті мәндерінің асимптотикалық сипатын зерттеуде бұрын қолданылған әдістерді өзгерту арқылы алынған.

5.1 Ω стратификацияланған жиыны және Ω - дағы функциялар кластары.

A және B нүктелерінен және $l=(0,1)$ интервалында ойылған C_1, C_2 екі шеңберден тұратын Ω стратификацияланған жиынын енгізейік. Біздің жағдайда Ω байланысқан жиын (сурет 2), C_1, C_2, l бірөлшемді страта, $\{A\}$ және $\{B\}$ бірнүктелі жиындары нөльдік өлшемдік страта ретінде алынған.



4 - Сурет - Жазықтықтағы Ω стратификацияланған жиыны

Ω стратификацияланған жиын туралы жоғарыда келтірілген фактілер бізге жеткілікті; стратификацияланған жиындар туралы жалпы ақпаратты [118, 119]-ден табуға болады. [120] жұмысқа сәйкес Ω жиынға μ өлшем, сондай-ақ сәйкес

функция кеңістіктері енгізіледі. [121, 122] жұмысқа сәйкес сәйкес Ω екі бөлек қиылыспайтын бөліктің бірігуі $\Omega_0 = C_1 \cup l \cup C_2$ және $\partial\Omega_0 = \{A, B\}$ ретінде көрсетіледі.

5.2 C_1 ойылған шеңберіндегі Лаплас-Белтрами операторы үшін дұрыс шешілетін есептер

Ыңғайлы болу үшін ойылған шеңбер

$$C_1 = \left\{ x_1 = \left(x_1^1,\ x_1^2\right) \in R^2 - (\{0,0\}):\ \left(x_1^2\right)^2 + \left(x_1^1 - 1\right)^2 = 1 \right\}$$

теңдеумен берілген деп есептейміз. C_1 ойылған шеңбері

$$\begin{cases} x_1^1 = \cos t_1 - 1 \\ x_1^2 = \sin t_1 \end{cases}$$

картасы арқылы беріледі. Сонымен қатар t_1 жергілікті координата $(0,\ 2\pi)$ аралық арқылы өтеді. C_1 ойылған шеңбері [121] жұмыста көрсетілгендей функциялар кластарын және Лаплас-Бельтрами операторын анықтауға болады. Атап айтқанда, егер C_1 ойылған шеңберінде функцияны $(0,\ 2\pi)$ аралықтағы функция ретінде көрсетілсе, бұл жағдайда Лаплас-Бельтрами операторы t_1 айнымалысына қатысты екі еселі дифференциалдау операторын білдіреді. Егер C_1 ойылған шеңберіндегі функцияны $x \in C_1$ функциясы ретінде қарастырсақ, онда Лаплас-Бельтрами операторының мәні екі еселі жанама туындымен сәйкес келеді. Лаплас-Бельтрами операторы жергілікті координаттарға қатысты инвариантты түрде анықталатындықтан, сәйкес теңдеулерді шешкен кезде теңдеуді жергілікті координаттардың туындыларында шешуге болады. Жергілікті координаттарды өз қалауыңыз бойынша таңдауға болады, содан кейін таңдалған координаттарда табылған шешім басқа кездейсоқ жергілікті координаттарда жазылуы керек. Жоғарыда келтірілген пайымдаулар келесі тұжырымның дұрыстығын растайды.

$L_2(C_1)$ тиесілі және C_1 ойылған шеңберіндегі кез-келген $f(x)$ функциясы және a, b сандары үшін

$$\left(I - \Delta_{C_1}\right)u(x) = f(x), \quad x \in C_1 \tag{5.2.1}$$

біртекті емес теңдеуі $A(0,0)$ нүктесінде

$$U_0(u) = a_1, \quad U_1(u) = b_1 \tag{5.2.2}$$

шарттарымен $u(x)\in W_2^2(C_1)$ жалғыз шешіміне ие. Теоремада Δ_{C_1} арқылы C_1 ойылған шеңберіндегі Лапласа-Бельтрами операторы белгіленген. Мұнда, (2) шарттарында сызықтық функционалдар $U_0(\cdot),\ U_1(\cdot)$ пайда болады, олар келесідей анықталады:

$$U_0(u)=\lim_{\substack{x\to A\\ x>A\\ x\in C_1}} u(x)-\lim_{\substack{x\to A\\ A>x\\ x\in C_1}} u(x)$$

$$U_1(u)=\lim_{\substack{x\to A\\ x>A\\ x\in C_1}} \frac{\partial u(x)}{\partial \tau}-\lim_{\substack{x\to A\\ A>x\\ x\in C_1}} \frac{\partial u(x)}{\partial \tau},$$

мұндағы $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ - ол x нүктесінде C_1 ойылған шеңберіне жанама бойынша туындыны білдіреді. 4.1-теореманың дәлелдеуін [121] жұмыстан табуға болады. 5.1-теоремадан және М. Өтелбаевтың [122-124] нәтижелерінен келесі теорема шығады.

Теорема 5.2. C_1 ойылған шеңберіндегі кез-келген $f(x)$ функциясы және $L_2(C_1)$ тиесілі біртекті емес теңдеу

$$\left(I-\Delta_{C_1}\right)u(x)=f(x),\quad x\in C_1$$

біртекті емес теңдеуі келесі шарттармен

$$U_0(u)=\int_{C_1}\left(I-\Delta_{C_1}\right)u(x)\overline{\sigma_0(x)}dl_x,\ U_1(u)=\int_{C_1}\left(I-\Delta_{C_1}\right)u(x)\overline{\sigma_1(x)}dl_x \qquad (5.2.3)$$

$\sigma_0,\sigma_1\in L_2(C_1)$ болғанда жалғыз $u(x)\in W_2^2(C_1)$ шешімге ие.

(ii). (5.2.1) біртекті емес операторлық теңдеуге (5.2.2) теңдеуі үшін кез-келген $f\in L_2(C_1)$ үшін $u(x)\in W_2^2(C_1)$ жалғыз шешімі болатындай етіп, кейбір шарттарды қосамыз деп есептейік. Сонда қосылған шарттар кейбір $\sigma_0,\sigma_1\in L_2(C_1)$ үшін (5.2.3) шарттарына эквивалентті болады.

Теореман 5.2-нің дәлелдеуі. 4.2-теореманың бірінші бөлігі

$$a_1=\int_{C_1} f(x)\overline{\sigma_0(x)}dl_x,\ b_1=\int_{C_1} f(x)\overline{\sigma_1(x)}dl_x$$

болғанда 5.1-теоремадан тікелей шығады. Енді 5.2-теореманың екінші бөлігін дәлелдейміз. Болжам бойынша, (5.2.1) теңдеуіне кейбір шарттарды қосамыз, сонда (5.2.1) теңдеуінің барлық $f\in L_2(C_1)$ үшін $u(x)$ жалғыз шешімі болады, және

$$\|u(x)\|_{L_2(C_1)}\le M\,\|f(x)\|_{L_2(C_1)} \qquad (5.2.4)$$

мұндағы M ол f тен тәуелді емес. Осылайша, (5.2.4) теңсіздігіне бағынатын $u(x)$ жалғыз шешімі бар. Енгізу теоремасынан сызықтық $U_0(u)$, $U_1(u)$ функцияларының мәндері бар екендігі шығады. (5.2.4) теңсіздігіне сәйкес $U_0(\cdot)$, $U_1(\cdot)$ сызықтық функционалдардың $L_2(C_1)$ да шектелген функционал екенін түсіну оңай. Демек, $L_2(C_1)$ кеңістігіндегі сызықтық үздіксіз функционалдың жалпы түрі туралы Ф. Рис теоремасына сәйкес, $\sigma_0(x), \sigma_1(x) \in L_2(C_1)$ болатындай

$$U_0(u) = \int_{C_1} f(x)\overline{\sigma_0(x)}dl_x,\ U_1(u) = \int_{C_1} f(x)\overline{\sigma_1(x)}dl_x$$

функциялары бар. Енді $f(x)$-ті $(I - \Delta_{C_1})u(x)$-ға ауыстыру керек, осыдан теорем 5.2-нің екінші бөлігінің айқындығы шығады.

5.3 Ω стратификацияланған жиындағы Лаплас-Белтрами операторы үшін қисынды шешілген есептер

Алдыңғы бөлімде біз ойылған C_1 шеңберіндегі Лаплас-Бельтрами операторы үшін дұрыс шешілетін есептерді жаздық. Сол сияқты, C_2 ойылған шеңберінде Лаплас-Бельтрами операторы үшін барлық мүмкін болатын дұрыс шешілетін сызықтық есептерді жазуға болады. $(0,1)$ интервалвалындағы қос еселі дифференциалдау операторы үшін дұрыс шешілетін сызықтық есептерді [122-124]- табуға болады. Енді, жоғарыдағы нәтижелерді пайдаланып, C_1, C_2 және l-ден тұратын стратификацияланған Ω жиынында Лаплас-Бельтрами операторы үшін барлық мүмкін болатын дұрыс шешілетін сызықтық есептерді жазамыз. Бұл абзацта тесілген C_1 ойылған шеңбері келесідей анықталады:

$$C_1 = \left\{x_1 = \left(x_1^1,\ x_1^2\right) \in R^2 - \left(\{0,0\}\right):\ \left(x_1^1 + 1\right)^2 + \left(x_1^2\right)^2 = 1\right\},$$

мұнда локалді координаттардың рөлін $t \in (0,\ 2\pi)$ айнымалысы атқарады:

$$\begin{cases} x_1^1 = \cos t_1 - 1 \\ x_1^2 = \sin t_1 \end{cases}$$

Ойылған шеңбер C_2 келесі жиын ретінде анықталады:

$$C_2 = \left\{x_2 = \left(x_2^1,\ x_2^2\right) \in R^2 - \left(\{1,0\}\right):\ \left(x_2^1 - 2\right)^2 + \left(x_2^2\right)^2 = 1\right\},$$

локалді координаттардың рөлін τ айнымалысы атқарады:

$$x_2^1 = 2 + \cos\tau, \quad x_2^2 = \sin\tau, \quad \tau \in (\tau, 3\tau)$$

l интервалы көлденең ашық кесінді ретінде анықталады

$$l = \left\{ x_3 = \left(x_3^1, x_3^2\right) \in R^2 : \ \ 0 < x_3^1 = S < 1, \ x_3^2 = 0 \right\}$$

Мұнда жергілікті координата рөлін $(0, 1)$ аралығы бойынша өтетін S параметрі атқарады. 5.1-теореманың аналогын ойылған C_2 шеңбері және l аралығы үшін де тұжырымдауға болады. Нәтижесінде келесі тұжырымды аламыз.

Теорема 5.3. Кез-келген $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ сандары және кез-келген $\vec{F} = \{f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(s)\} \in L_2(\Omega)$ функциялары үшін

$$\begin{cases} \left(I - \Delta_{C_1}\right) u_1(x_1) = f_1(x_1), \quad x_1 \in C_1, \\ \left(I - \Delta_{C_2}\right) u_2(x_2) = f_2(x_2), \quad x_2 \in C_2, \\ u_3(s) - u_3''(s) = f_3(s), \ \ s \in (0, 1) \end{cases} \tag{5.3.1}$$

біртекті емес теңдеуі

$$\begin{aligned} &U_0(u_1) = a_1, \ \ U_1(u_1) = b_1, \\ &V_0(u_2) = a_2, \ \ V_1(u_2) = b_2, \\ &u_3(0) = a_3, \ \ u_3(1) = b_3. \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

шарттарымен $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_2^2(\Omega)$ жалғыз шешімге ие. Теореме 5.3-те Δ_{C_2} арқылы C_2 ойылған шеңберіндегі Лапласа-Бельтрами операторы. $V_0(\cdot)$, $V_1(\cdot)$ арқылы шекті қатынастармен анықталатын сызықтық формалар келесідей белгіленеді:

$$V_0(u_2) = \lim_{\substack{x \to B \\ x > B \\ x \in C_2}} u_2(x) - \lim_{\substack{x \to B \\ B > x \\ x \in C_2}} u_2(x)$$

$$V_1(u_2) = \lim_{\substack{x \to B \\ x > B \\ x \in C_2}} \frac{\partial u_2(x)}{\partial \tau} - \lim_{\substack{x \to B \\ B > x \\ x \in C_2}} \frac{\partial u_2(x)}{\partial \tau},$$

мұндағы $B = (1,0)$ және $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ ол x нүктесінде C_2 ойылған шеңберге жанама бойынша туынды.

Доғасыз графтар үшін ұқсас нәтижелер [125]-те зерттелген. Бұл теореманы доғалары бар графтардағы Лаплас-Бельтрами операторы үшін дұрыс шешілетін

есептер ретінде түсіндіруге болады. 5.3-теоремадан және [122–124] нәтижелерінен тұжырымдар шығады.

Теорема 5.4. Кез-келген $\vec{F} = \{f_1, f_2, f_3\} \in L_2(\Omega)$ функциясы үшін біртекті емес (5.3.1) теңдеулер жүйесі келесі шарттарымен

$$\begin{cases} U_0(u_1) = \int\limits_{C_1} (I - \Delta_{C_1}) u_1(x_1) \overline{\sigma_1(x_1)} dl_1 + \int\limits_{C_2} (I - \Delta_{C_2}) u_2(x_2) \overline{\rho_1(x_2)} dl_2 + \int\limits_0^1 (u_3(s) - u_3''(s)) \overline{\varphi_1(s)} ds \\ U_1(u_1) = \int\limits_{C_1} (I - \Delta_{C_1}) u_1(x_1) \overline{\sigma_2(x_1)} dl_1 + \int\limits_{C_2} (I - \Delta_{C_2}) u_2(x_2) \overline{\rho_2(x_2)} dl_2 + \int\limits_0^1 (u_3(s) - u_3''(s)) \overline{\varphi_2(s)} ds \\ V_0(u_2) = \int\limits_{C_1} (I - \Delta_{C_1}) u_1(x_1) \overline{\sigma_3(x_1)} dl_1 + \int\limits_{C_2} (I - \Delta_{C_2}) u_2(x_2) \overline{\rho_3(x_2)} dl_2 + \int\limits_0^1 (u_3(s) - u_3''(s)) \overline{\varphi_3(s)} ds \\ V_1(u_2) = \int\limits_{C_1} (I - \Delta_{C_1}) u_1(x_1) \overline{\sigma_4(x_1)} dl_1 + \int\limits_{C_2} (I - \Delta_{C_2}) u_2(x_2) \overline{\rho_4(x_2)} dl_2 + \int\limits_0^1 (u_3(s) - u_3''(s)) \overline{\varphi_4(s)} ds \\ u_3(0) = \int\limits_{C_1} (I - \Delta_{C_1}) u_1(x_1) \overline{\sigma_5(x_1)} dl_1 + \int\limits_{C_2} (I - \Delta_{C_2}) u_2(x_2) \overline{\rho_5(x_2)} dl_2 + \int\limits_0^1 (u_3(s) - u_3''(s)) \overline{\varphi_5(s)} ds \\ u_3(1) = \int\limits_{C_1} (I - \Delta_{C_1}) u_1(x_1) \overline{\sigma_6(x_1)} dl_1 + \int\limits_{C_2} (I - \Delta_{C_2}) u_2(x_2) \overline{\rho_6(x_2)} dl_2 + \int\limits_0^1 (u_3(s) - u_3''(s)) \overline{\varphi_6(s)} ds \end{cases} \quad (5.3.3)$$

$\sigma_j \in L_2(C_1),\ \rho_j \in L_2(C_2),\ \varphi_j \in L_2(0, 1),\ j = 1,2,3,4,5,6$ болғанда жалғыз $u = \{u_1, u_2, u_3\} \in W_2^2(\Omega)$ шешімге ие.

(ii) (5.3.1) теңдеудегі барлық $\vec{F} = \{f_1, f_2, f_3\} \in L_2(\Omega)$ үшін $u = \{u_1, u_2, u_3\} \in W_2^2(\Omega)$ жалғыз шешімге ие болатындай біртекті емес (5.3.1) теңдеулер жүйесіне кейбір (5.3.2) шарттарды қосайық. Онда қосылған шарттар (5.3.3) түріндегі шарттар

$$\sigma_j \in L_2(C_1),\ \rho_j \in L_2(C_2),\ \varphi_j \in L_2(0, 1),\ j = 1,2,3,4,5,6$$

болған кездегі шарттраға эквивалент болады. 5.4-теореманың дәлелдеуі 5.2-теореманың дәлелдеуін қайталайды, бірақ Гильберт $L_2(\Omega)$ кеңістігіне қатысты Ф. Рисс теоремасы қолданылады.

Ойылған шардағы Лаплас операторы үшін жақсы қойылған шекаралық есептердің тұжырымдамасы [126–128] мақалаларында талқыланды. Ойылған сферадағы Лаплас-Бельтрами операторы үшін барлық мүмкін болатын жақсы анықталған есептердің сипаттамасын [129–131] мақаласынан табуға болады. Ойылған облыста немесе кесінділі облыста дифференциалдық операторлар үшін барлық жерде жақсы қойылған есептерді тұрақты дифференциалдық операторлардың сингулярлық ауытқулары ретінде түсіндіруге болады. Осы тұрғыдан алғанда, сингулярлық дифференциалдық операторлар [132–135] мақалаларында, ал Дирихле және Нейман есептері үшін дифференциалдық операторлар [135, 136] мақалаларында зерттелген.

5.4 Стратификацияланған жиындағы дұрыс шешілетін есептердің мысалдары

Бұл бөлімде біз 5.4-теореманың бірінші бөлігінен алынған нақты мысалдарды келтіреміз. [121]-тен алынған 5.1-лемманы еске түсірейік.

Лемма 5.1. [4]. Кез келген тегіс 2π-периодтық $\hat{F}(t)$ функциясы үшін

$$\int_0^t \hat{F}(t)dt = \int_{\gamma_x^1} F\left(\xi^1, \xi^2\right)\left(\xi^1 d\xi^2 - \xi^2 d\xi^1\right),$$

интегралдық сәйкестік орындалады, мұндағы γ_x^1 дегеніміз $(0,0)$ және $x = \left(x^1, x^2\right) \in C_1$ нүктелерін қосатын C_1^1 ойылған шеңберінің бағытталған доғасы. Мұнда $x \in C_1$ үшін $F(x)$ функциясы $t \in (0, 2\pi)$үшін $\hat{F}(t)$ функциясымен келесідей жасалады: алдымен $\hat{F}(t)$ функциясын

$$\hat{F}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right), \quad t \in (0, 2\pi)$$

тригонометриялық қатарына жіктейміз, одан соң $x^1 + 1 = \cos t,\ x^2 = \sin t$ формулалары арқылы t-дан $\left(x^1, x^2\right) = x \in C_1$ айнымалыларына көшеміз.

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k T_k\left(x^1 + 1\right) + b_k x^2 U_{k-1}\left(x^1 + 1\right)\right),$$

Мұндағы T_k және U_{k-1} сәйкесінше бірінші және екінші текті Чебышев көпмүшелері. Сол сияқты $\tau \in (\pi, 3\pi)$ үшін $\int_0^{\tau} \hat{\sigma}(\tau)d\tau$ интегралын

$$\int_{\gamma_x^2} \sigma\left(\xi^1, \xi^2\right)\left(\xi^1 d\xi^2 - \xi^2 d\xi^1\right)$$

интегралы арқылы қайта жазуға болады. Мұндағы γ_x^2 дегеніміз $x = \left(x^1, x^2\right) \in C_2$ және $(-1;0)$ нүктелерін қосатын, оң бағытталған доғамен ойылған C_2 шеңбер. Мұнда $\sigma(x)$ $x \in C_2$ функциясы $\hat{\sigma}(\tau)$ функциясы $\tau \in (\pi, 3\pi)$ үшін жасалған келесідей жасалады:

Алдымен $\hat{\sigma}(\tau)$ды $\tau \in (\pi, 3\pi)$ үшін келесі тригонометриялық қатарға

$$\hat{\sigma}(\tau) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k \cos k\tau + d_k \sin k\tau\right), \quad \tau \in (\pi, 3\pi),$$

жіктейміз және $x^1-2=\cos\tau,\ x^2=\sin\tau$ формулалары арқылы τ параметрінен $\left(x^1,x^2\right)=x\in C_2$ айнамалысына көшеміз, сонда

$$\sigma(x)=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_kT_k\left(x^1-2\right)+d_kx^2\left(x^1-2\right)\right).$$

(7) шартта $\int\limits_{C_1}f_1(x_1)\overline{\sigma_1x_1}dl_1$ және $\int\limits_{C_2}f_2(x_2)\overline{\sigma_2x_2}dl_2$ интегралдары бар. Бұл интегралдарды сәйкесінше t және τ локальді координаттар арқылы жаза аламыз, сонда

$$\int\limits_{C_1}f_1(x_1)\overline{\sigma_1x_1}dl_1=\int\limits_0^{2\pi}f_1(\cos t-1,\sin t)\overline{\sigma_1(\cos t-1,\sin t)}dt=\int\limits_0^{2\pi}\hat{f}_1(t)\overline{\hat{\sigma}_1(t)}dt,$$
$$\int\limits_{C_2}f_2(x_2)\overline{\sigma_2x_2}dl_2=\int\limits_{\pi}^{3\pi}f_2(2+\cos\tau,\sin\tau)\overline{\sigma_2(2+\cos\tau,\sin\tau)}d\tau=\int\limits_{\pi}^{3\pi}\hat{f}_2(t)\overline{\hat{\sigma}_2(t)}d\tau.$$

Енді $\int\limits_{C_1}\left(I-\Delta_{C_1}\right)\mu_1(x_1)\overline{\sigma_1(x_1)}dl_1$ интегралын өзімізге ыңғайлы түрде жаза аламыз, яғни

$$\int\limits_{C_1}\left(I-\Delta_{C_1}\right)\mu_1(x_1)\overline{\sigma_1(x_1)}dl_1=\int\limits_{C_1}f_1(x_1)\overline{\sigma_1(x_1)}dl_1=\int\limits_0^{2\pi}\hat{f}_1(t)\overline{\hat{\sigma}_1(t)}dt=\int\limits_0^{2\pi}\left(\hat{u}_1(t)-\hat{u}_1''(t)\right)\overline{\hat{\sigma}_1(t)}dt.$$

$\hat{\sigma}_1(t)$-ді екі рет үзіліссіз дифференциалданады деп алып, соңғы интегралды бөліктеп интегралдаймыз. Нәтижесінде

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\hat{u}_1(t)-\hat{u}_1''(t)\right)\overline{\hat{\sigma}_1(t)}dt=\int\limits_0^{2\pi}\hat{u}_1(t)\overline{\left(\hat{\sigma}_1(t)-\hat{\sigma}_1''(t)\right)}dt-\hat{u}_1'(t)\overline{\hat{\sigma}_1(t)}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}+\hat{u}_1(t)\overline{\hat{\sigma}_1'(t)}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\hat{u}_1(t)\overline{\left(\hat{\sigma}_1(t)-\hat{\sigma}_1''(t)\right)}dt-\hat{u}'(2\pi-0)\overline{\hat{\sigma}_1(2\pi-0)}+\hat{u}_1(2\pi-0)\overline{\hat{\sigma}_1'(2\pi-0)}+\hat{u}_1'(+0)\overline{\hat{\sigma}_1(+0)}-\hat{u}_1(+0)\overline{\hat{\sigma}_1'(+0)}$$

Енді t локальді координаттардан $\left(x_1^1,x_1^2\right)=x$ айнымалысына көшетін болсақ, онда

$$\int\limits_{C_1}\left(I-\Delta_{C_1}\right)\mu_1(x_1)\overline{\sigma_1(x_1)}dl_1=\int\limits_{C_1}u_1(x_1)\overline{\left(I-\Delta_{C_1}\right)\sigma_1(x_1)}dl_1-\frac{\partial u_1}{\partial\tau}\left(\prec(0,0)\overline{\sigma_1\prec(0,0)}\right)+$$
$$+u_1(\prec(0,0))\overline{\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_1(\prec(0,0))}+\frac{\partial u_1(\prec(0,0))}{\partial\tau}\sigma_1(\prec(0,0))-u_1(\prec(0,0))\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_1(\prec(0,0)),\qquad(5.4.1)$$

мұндағы

$$g(\prec(0,0))=\lim_{\substack{x_1\to(0,0)\\ x_1\prec(0,0)\\ x_1\in C_1}} g(x_1),\quad g(\succ(0,0))=\lim_{\substack{x_1\to(0,0)\\ x_1\succ(0,0)\\ x_1\in C_1}} g(x_1),$$

$$\frac{\partial g(\prec(0,0))}{\partial\tau}=\lim_{\substack{x_1\to(0,0)\\ x_1\prec(0,0)\\ x_1\in C_1}}\frac{\partial g(x_1)}{\partial\tau},\quad \frac{\partial g(\succ(0,0))}{\partial\tau}=\lim_{\substack{x_1\to(0,0)\\ x_1\succ(0,0)\\ x_1\in C_1}}\frac{\partial g(x_1)}{\partial\tau},$$

Мұндағы $\frac{\partial}{\partial\tau}$ дегенміз C_1-ге жүргізілген жанаманың бойындағы x_1 нүктесінде алынған туынды. Сол сияқты, $u_2(x_2),\ \rho_2(x_2)$ бойынша кез келген екі тегіс C_2 функциясы үшін келесі теңдік орындалады

$$\begin{aligned}&\int_{C_2}\left(I-\Delta_{C_2}\right)u_2(x_2)\overline{\rho_2(x_2)}dl_2=\int_{C_2}u_2(x_2)\overline{\left(I-\Delta_{C_2}\right)\rho_2(x_2)}dl_2-\\&-\frac{\partial u_2(\prec(-1,0))}{\partial\tau}\overline{\rho_2\prec(-1,0)}+u_2(\prec(-1,0))\overline{\frac{\partial\rho_2(\prec(-1,0))}{\partial\tau}}+\\&+\frac{\partial u_2(\succ(-1,0))}{\partial\tau}\overline{\rho_2\succ(-1,0)}-u_2(\succ(-1,0))\overline{\frac{\partial\rho_2(\succ(-1,0))}{\partial\tau}},\end{aligned}\qquad(5.4.2)$$

Мұндағы $\frac{\partial}{\partial\tau}$ дегенміз C_2-ге жүргізілген жанаманың бойындағы x_2 нүктесінде алынған туынды. Берілген көмекші тұжырымдар 5.4-теореманың салдарын алуға мүмкіндік береді. Енді 5.4 теоремадан $j=1,2,3,4,5,6$ болған кездегі шекаралық $\sigma_j(x_1),\ \rho_j(x_2),\ \varphi_j(x_3)$ шекаралық функцияларды анықтаймыз. $j=1,2,3,4,5,6$ үшін $\sigma_j(x_1),\ \rho_j(x_2),\ \varphi_j(x_3)$ шекаралық функциялары келесідей болады:

$$\begin{aligned}&\left(I-\Delta_{C_1}\right)\sigma_j(x_1)=0,\ \ x_1\in C_1,\\&\left(I-\Delta_{C_2}\right)\rho_j(x_2)=0,\ \ x_2\in C_1,\\&\varphi_j(s)-\varphi_j''(s)=0,\quad s\in(0,1).\end{aligned}$$

(5.4.1) - (5.4.2) теңдіктерден келесі

$$\begin{aligned}&\int_{C_1}\left(I-\Delta_{C_1}\right)u_1(x_1)\overline{\sigma_1(x_1)}dl_1=-\frac{\partial u_1(\prec(0,0))}{\partial\tau}\left(\overline{\sigma_j\prec(0,0)}\right)+\\&+u_1(\prec(0,0))\overline{\frac{\partial\sigma_j(\prec(0,0))}{\partial\tau}}+\frac{\partial u_1(\succ(0,0))}{\partial\tau}\overline{\sigma_j(\prec(0,0))}-u_1(\succ(0,0))\overline{\frac{\partial\sigma_j(\prec(0,0))}{\partial\tau}},\\&\int_{C_2}\left(I-\Delta_{C_2}\right)u_2(x_2)\overline{\rho_2(x_2)}dl_2=-\frac{\partial u_2(\prec(-1,0))}{\partial\tau}\overline{\rho_j\prec(-1,0)}+u_2(\prec(-1,0))\overline{\frac{\partial\rho_j(\prec(-1,0))}{\partial\tau}}+\\&+\frac{\partial u_2(\succ(-1,0))}{\partial\tau}\overline{\rho_j\succ(-1,0)}-u_2(\succ(-1,0))\overline{\frac{\partial\rho_2(\succ(-1,0))}{\partial\tau}},\\&\int_0^1\left(u_3(s)-u_3''(s)\right)\overline{\varphi_j(s)}ds=-\frac{du_3(1-0)}{ds}\overline{\varphi_j(1-0)}+u_3(1-0)\frac{d\varphi_j(1-0)}{ds}+\frac{du_3(+0)}{ds}\overline{\varphi_j(+0)}-u_3(+0)\frac{d\varphi_j(+0)}{ds}.\end{aligned}$$

Осылайша, 5.4-теоремадан алынған (5.3.3) шекаралық шарттар $j = 1,2,3,4,5,6$ үшін келесі түрге келеді:

$$\begin{aligned}
U_j &= \overline{\hat{\sigma}_j(+0)}\left[\hat{u}_1'(+0) - \cosh 2\pi\hat{u}_1'(2\pi-0) + \sinh 2\pi\hat{u}_1'(2\pi-0)\right] + \\
&+ \overline{\hat{\sigma}_j'(+0)}\left[\cosh 2\pi\hat{u}_1'(2\pi-0) - \sinh 2\pi\hat{u}_1'(2\pi-0) - \hat{u}_1'(+0)\right] + \\
&+ \overline{\hat{\rho}_j(\pi+0)}\left[\hat{u}_2'(\pi+0) - \cosh 2\pi\hat{u}_2'(3\pi-0) + \sinh 2\pi\hat{u}_2'(3\pi-0)\right] + \\
&+ \overline{\hat{\rho}_j'(\pi+0)}\left[\cosh 2\pi\hat{u}_2'(3\pi-0) - \sinh 2\pi\hat{u}_2'(3\pi-0) - \hat{u}_2'(\pi+0)\right] + \\
&+ \overline{\varphi_j(+0)}\left[u_3'(+0) + \frac{\cosh 1}{\sinh 1}u_3(0) - \frac{1}{\sinh 1}u_3(1-0)\right] + \\
&+ \overline{\varphi_j(1-0)}\left[\frac{\cosh 1}{\sinh 1}u_3(1-0) - u_3'(1-0) - \frac{1}{\sinh 1}u_3(1-0)\right],
\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Мұндағы

$$\begin{aligned}
&U_1(u_1) = \hat{u}_1(+0) - \hat{u}_1(2\pi-0), && U_2(u_1) = \hat{u}_1'(+0) - \hat{u}_1'(2\pi-0), \\
&U_3(u_2) = \hat{u}_2(\pi+0) - \hat{u}_2(3\pi-0), && U_4(u_2) = \hat{u}_2'(\pi+0) - \hat{u}_2'(3\pi-0), \\
&U_5(u_3) = u_3(+0), && U_6(u_3) = u_3(1-0).
\end{aligned}$$

5.5 Өз өзіне түйіндес қисынды шешілетін есептер

Алдыңғы бөлімде шекаралық шарттарды қолдана отырып қойылған дұрыс шешілетін есептердің мысалдары келтірілген. Енді біз олардың ішінен өздігінен түйіндес есептерді таңдаймыз. Дұрыс шешілетін есептер $\lambda = 0$ жиынтықтарын қамтитын операторларға сәйкес келеді. Сонымен қатар, өздігінен түйісетін, жақсы шешілетін есептер меншікті мәндері нөлден тыс нақты сандарды беретін операторларға сәйкес келеді. Осылайша, бұл бөлімде спектрі дискретті және нөлден тыс нақты меншікті мәндерден тұратын осындай жақсы шешілетін есептер ерекшеленеді. Естеріңізге сала кетейік, кез келген екі жеткілікті тегіс $u_1(x_1), u_2(x_2), u_3(s)$ және $\vartheta_1(x_1), \vartheta_2(x_2), \vartheta_3(s)$ функциялар үшін

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1}\left(I-\Delta_{C_1}\right)u_1(x_1)\overline{\vartheta_1(x_1)}dl_1 + \int_{C_2}\left(I-\Delta_{C_2}\right)u_2(x_2)\overline{\vartheta_2(x_2)}dl_2 + \int_0^1 (u_3(s)-u_3''(s))\overline{\vartheta_3(s)}ds = \\
&= \int_{C_1} u_1(x_1)\overline{\left(I-\Delta_{C_1}\right)\vartheta_1(x_1)}dl_1 + \int_{C_2} u_2(x_2)\overline{\left(I-\Delta_{C_2}\right)\vartheta_2(x_2)}dl_2 + \int_0^1 u_3(s)\overline{(\vartheta_3(s)-\vartheta_3''(s))}ds + \\
&+ \left(\hat{u}_1'(+0)-\hat{u}_1'(2\pi-0)\right)\overline{\hat{\vartheta}_1(2\pi-0)} + \hat{u}_1'(+0)\overline{\left(\hat{\vartheta}_1(+0)-\hat{\vartheta}_1(2\pi-0)\right)} -
\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

$$-\left(\hat{u}_1(+0)-\hat{u}_1(2\pi-0)\right)\overline{\hat{\vartheta}_1'(2\pi-0)}+\hat{u}_1(+0)\overline{\left(\hat{\vartheta}_1'(+0)-\hat{\vartheta}_1'(2\pi-0)\right)}+$$
$$+\left(\hat{u}_2'(\pi+0)-\hat{u}_2'(3\pi-0)\right)\overline{\hat{\vartheta}_2(3\pi-0)}+\hat{u}_2'(\pi+0)\overline{\left(\hat{\vartheta}_2(\pi+0)-\hat{\vartheta}_2(3\pi-0)\right)}-$$
$$-\left(\hat{u}_2(\pi+0)-\hat{u}_2(3\pi-0)\right)\overline{\hat{\vartheta}_2'(3\pi-0)}+\hat{u}_2(\pi+0)\overline{\left(\hat{\vartheta}_2'(3\pi-0)-\hat{\vartheta}_2'(\pi+0)\right)}-$$
$$-u_3'(1-0)\overline{\vartheta_3(1-0)}+u_3'(+0)\overline{\vartheta_3(+0)}+u_3(1-0)\overline{\vartheta_3'(1-0)}+u_3(+0)\overline{\vartheta_3'(+0)},$$

Мұндағы

$$\hat{u}_1(t)=u_1(\cos t-1,\sin t),\ \ t\in(0,2\pi),$$
$$\hat{u}_2(\tau)=u_2(2+\cos\tau,\sin\tau),\ \ t\in(\pi,3\pi).$$

D функциясы $u_1(x_1),u_2(x_2),u_3(s)$ функцияларының жиынын келесідей етіп белгілесін:

$$u_1(x_1)\in W_2^2(C_1),\quad u_2(x_2)\in W_2^2(C_2),\ u_3(s)\in W_2^2(0,1).$$

Сонымен қатар, $u_1(x_1),u_2(x_2),u_3(s)\in D$ функцияларынан тұратын D_0 жиынын енгізейік:

$$\hat{u}_1'(+0)=\hat{u}_1'(2\pi-0),\quad \hat{u}_1'(+0)=0,\ \hat{u}_1(+0)=\hat{u}_1(2\pi-0),\quad \hat{u}_1(+0)=0,$$
$$\hat{u}_2'(\pi+0)=\hat{u}_2'(3\pi-0),\quad \hat{u}_2'(\pi+0)=0,\ \hat{u}_2(\pi+0)=\hat{u}_2(3\pi-0),\quad \hat{u}_2(\pi+0)=0,$$
$$u_3(+0)=0,\quad u_3'(+0)=0,\ u_3(1-0)=0,\quad u_3'(1-0)=0.$$

Формуланы пайдаланып, L операторын D-ге енгізейік

$$L=(u_1(x_1),u_2(x_2),u_3(s))=\left((I-\Delta_{C_1})u_1(x_1),(I-\Delta_{C_2})u_2(x_2),(u_3(s)-u_3''(s))\right).$$

L операторының D_0-ға шектеуін L_0 арқылы белгілейік. L_0 операторы Эрмиттік болып табылады және [60] монографияға сәйкес біз L_0 операторының барлық мүмкін болатын өздігінен түйіндес кеңейтулерін жазамыз. Ол үшін бізге L_0 операторының кейбір қасиеттері қажет.

Лемма 5.2. $(f_1(x_1),\ f_2(x_2),\ f_3(s))\in L_2(\Omega)$ болсын.

$$L_0=(u_1(x_1),u_2(x_2),u_3(s))=(f_1(x_1),\ f_2(x_2),\ f_3(s))$$

теңдеуінің шешімі болады, егер және тек $(f_1(x_1),\ f_2(x_2),\ f_3(s))$ біртекті

$$\left(I-\Delta_{C_1}\right)\omega_1(x_1)=0,\ \ \left(I-\Delta_{C_2}\right)\omega_2(x_2)=0,\quad \omega_2(s)-\omega_2''(s)=0 \qquad (5.5.2)$$

жүйесінің барлық шешімдеріне ортогональ болса ғана.

Дәлелдеуі. $u_1(x_1),u_2(x_2),u_3(s)$ арқылы

$$(I-\Delta_{C_1})u_1(x_1)=f_1(x_1),\ (I-\Delta_{C_2})u_2(x_2)=f_2(x_2),\ \ u_3(s)-u_3''(s)=f_3(s)$$

теңдеуінің шешімдерін

$$\hat{u}_1'(+0)=\hat{u}_1'(2\pi-0),\quad \hat{u}_1'(+0)=0,\ \hat{u}_1(+0)=\hat{u}_1(2\pi-0),$$
$$\hat{u}_2'(\pi+0)=\hat{u}_2'(3\pi-0),\quad \hat{u}_2(\pi+0)=\hat{u}_2(3\pi-0),$$
$$u_3(+0)=0,\quad u_3(1-0)=0,$$

шарттарын қанағаттандыратындай етіп алайық. [121] жұмысының нәтижелерінен көрсетілген есептің бірегей шешімі $u_1(x_1),u_2(x_2),u_3(s)$ бар екені шығады. [121] жұмысында берілген есептің меншікті мәндері есептеліп, меншікті мәндер арасында нөл жоқ екені көрсетілген. Табылған шешім үшін $u_1(x_1),u_2(x_2),u_3(s)$ (5.5.1) теңдеуі келесі түрге ие болады

$$\int_{C_1} f_1(x_1)\overline{\vartheta_1(x_1)}dl_1+\int_{C_2} f_2(x_2)\overline{\vartheta_2(x_2)}dl_2+\int_0^1 f_3(s)\overline{\vartheta_3(s)}ds=$$
$$=\int_{C_1} u_1(x_1)\overline{(I-\Delta_{C_1})\vartheta_1(x_1)}dl_1+\int_{C_2} u_2(x_2)\overline{(I-\Delta_{C_2})\vartheta_2(x_2)}dl_2+\int_0^1 u_3(s)\overline{(\vartheta_3(s)-\vartheta_3''(s))}ds+$$
$$+\hat{u}_1'(+0)\overline{\left(\hat{\vartheta}_1(+0)-\hat{\vartheta}_1(2\pi-0)\right)}+\hat{u}_1(+0)\overline{\left(\hat{\vartheta}_1'(2\pi-0)-\hat{\vartheta}_1'(+0)\right)}+$$
$$+\hat{u}_2'(\pi+0)\overline{\left(\hat{\vartheta}_2(\pi+0)-\hat{\vartheta}_2(3\pi-0)\right)}+\hat{u}_2(\pi+0)\overline{\left(\hat{\vartheta}_2'(3\pi-0)-\hat{\vartheta}_2'(\pi-0)\right)}-$$
$$-\hat{u}_3'(1-0)\overline{\vartheta_3(1-0)}+\hat{u}_3'(+0)\overline{\vartheta_3(+0)}$$

Енді (4.5.2) біртекті теңдеулері және қосымша шарттар

$$\hat{\vartheta}_{11}(+0)-\hat{\vartheta}_{11}(2\pi-0)=1,\quad \hat{\vartheta}_{11}'(2\pi-0)-\hat{\vartheta}_{11}'(+0)=0,$$
$$\hat{\vartheta}_{12}(\pi+0)-\hat{\vartheta}_{12}(3\pi-0)=0,\quad \hat{\vartheta}_{12}'(3\pi-0)-\hat{\vartheta}_{12}'(\pi+0)=0, \qquad (5.5.3)$$
$$\vartheta_{13}(1-0)=0,\quad \vartheta_{13}(+0)=0.$$

қанағаттандырылатындай етіп $V_1=(\vartheta_{11}(x_1),\vartheta_{12}(x_2),\ \vartheta_{13}(s))$ таңдайық.

$\vartheta_{13}(s)\equiv 0,\ \vartheta_{12}(x_2)\equiv 0,\ \hat{\vartheta}_{11}(t)=\dfrac{e^{2\pi-t}-e^t}{2(e^{2\pi}-1)}$ екенін ескерейік. Онда (5.5.3) қатынасынан келесідей

$$\int_{C_1} f_1(x1)\overline{\vartheta_{11}(x_{11})}dl_1=\hat{u}_1'(+0) \qquad (5.5.4)$$

қатынас орынды. $V_2=(V_{21}(x_1),V_{22}(x_2),V_{23}(s))$ мәнін тиімді түрде таңдау арқылы

$$\int_{C_1} f_1(x1)\overline{\vartheta_{21}(x_{11})}dl_1=\hat{u}_1(+0) \qquad (5.5.6)$$

қатынасын аламыз. [137] монографиядағыдай пайымдау арқылы біз келесі қатынастарды аламыз:

$$\int_{C_2} f_2(x_2)\overline{\vartheta_{32}(x_2)}dl_2 = \hat{u}_2'(+0) \tag{5.5.7}$$

$$\int_{C_2} f_2(x_2)\overline{\vartheta_{42}(x_2)}dl_2 = \hat{u}_2(+0) \tag{5.5.8}$$

$$\int_0^1 f_3(s)\overline{\vartheta_{53}(s)}ds = -u_3'(1-0) \tag{5.5.9}$$

$$\int_0^1 f_3(s)\overline{\vartheta_{63}(s)}ds = u_3'(+0) \tag{5.5.10}$$

(5.5.7) - (5.5.10) қатынастарынан 5.1-лемманың тұжырымы шығады.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыс графтардағы Штурм–Лиувилль операторларының спектрлік талдауына қатысты тікелей және ішінара кері есептерді зерттеуге арналған. Зерттеу барысында қойылған мақсатқа жеттім:

1. Граф-жұлдыз бен граф-ағаштағы екінші ретті дифференциалдық операторлардың негізгі шешімдері мен сипаттамалық анықтауыштарын талдау негізінде тікелей спектралдық есептерді зерттелді.

2. Граф – жұлдыз бен граф-ағаштағы екінші ретті дифференциалдық операторлар үшін анықталу облыстарын идентификациялау есептерін жартылай кері спектралдық есептер ретінде зерттелді.

3. Граф-жұлдыздағы Штурм–Лиувилль операторының меншікті мәндерінің асимптотикалық формуласы табылды.

4. Шекаралық коэффициенттер мен үйлесімділік шарттарына кіретін коэффициенттерді тектес операторлардың меншікті мәндерінің шектеулі жиыны бойынша бірмәнді қалпына келтіру алгоритмі әзірленді.

Зерттеудің маңызды кезеңі - Штурм–Лиувилль операторлары қарапайым меншікті мәндерге ие болатын графтардың кең класын анықтау болып табылады. Диссертациялық жұмысты орындау барысында алғаш рет меншікті мәндердің қарапайым болуын қамтамасыз ететін 1-талап тұжырымдалды. Диссертациялық жұмыстың айрықша ерекшелігі - белгісіз коэффициенттерді бірмәнді қалпына келтіру меншікті мәндердің шектеулі жиыны бойынша жүзеге асырылуында.

Диссертациялық зерттеу нәтижелері бойынша 6 жұмыс жарияланды, оның ішінде:

– Clarivate Analytics Journal Citation Reports және/немесе Scopus дерекқорларына енгізілген ғылыми журналдарда жарияланған 3 мақала;

– Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім беру саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған журналда жарияланған 1 мақала;

– халықаралық ғылыми конференциялар материалдарының жинақтарында жарияланған 2 еңбек.

Осылайша, диссертациялық жұмыстың нәтижелері ғылыми маңызға ие болып, графтардағы дифференциалдық операторлар үшін кері есептерді шешу теориясы мен практикасының дамуына елеулі үлес қосады. Осы саладағы бұдан кейінгі зерттеулер қарастырылатын теңдеулер кластарын кеңейтуге, сондай-ақ оларды шешу әдістерін жаңа теориялық және қолданбалы нәтижелер негізінде жетілдіруге бағытталуы мүмкін.

Диссертациялық зерттеу аясында алынған барлық нәтижелер Scopus дерекқорына енгізілген және Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім беру саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған ғылыми журналдарда жарияланған [38,51,52,53].

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. P. Kurasov, Inverse scattering for lasso graph, J. Math. Phys., 54 (2013), 04210314, 14pp.
2. Yu. V. Pokorny, O. M. Penkin and V. L. Pryadiev, et al., Differential equations on geometrical graphs, Fizmatlit, Moscow, 2004 (Russian).
3. G. Freiling and V. Yurko, Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, Nova Science Publishers, Inc., Huntington, NY, 2001.
4. B. M. Levitan, Inverse Sturm-Liouville Problems, Nauka, Moscow, 1984 (Russian); English transl., VNU Sci. Press, Utrecht, 1987.
5. V. A. Marchenko, Sturm-Liouville Operators and their Applications, Naukova Dumka, Kiev, 1977 (Russian); English transl., Birkhauser, 1986.
6. J. Poschel and E. Trubowitz, Inverse Spectral Theory, New York, Academic Press, 1987.
7. V. A. Yurko, Inverse spectral problems for differential operators on spatial networks, Russian Mathematical Surveys, 71 (2016), 539-584.
8. V. A. Yurko, Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs, J. Inverse and Ill-Posed Probl., 18 (2010), 245-261
9. Hochstadt, H.; Lieberman, B. An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data. SIAM J. Appl. Math. 1978, 34, 676–680.
10. Hald, O. Discontinuous inverse eigenvalue problem. Commun. Pure Appl. Math. 1984, 37, 539–577
11. Gesztesy, F.; Simon, B. Inverse spectral analysis with partial information on the potential, II. The case of discrete spectrum. Trans.AMS 2000, 352, 2765–2787.
12. Horváth, M. On the inverse spectral theory of Schrödinger and Dirac operators. Trans. AMS 2001, 353, 4155–4171. [CrossRef]
13. Horváth, M. Inverse spectral problems and closed exponential systems. Ann. Math. 2005, 162, 885–918. [CrossRef]
14. Sakhnovich, L. Half-inverse problems on the finite interval. Inverse Probl. 2001, 17, 527–532. [CrossRef]
15. Hryniv, R.O.; Mykytyuk, Y.V. Half-inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials. Inverse Probl.2004, 20, 1423–1444. [CrossRef]
16. Buterin, S.A. On a constructive solution of the incomplete inverse Sturm-Liouville problem. Math. Mekhanika Saratov State Univ.2009, 11, 8–12. (In Russian)
17. Buterin, S.A. On half inverse problem for differential pencils with the spectral parameter in boundary conditions. Tamkang J.Math. 2011, 42, 355–364 [CrossRef]
18. Martinyuk, O.; Pivovarchik, V. On the Hochstadt-Lieberman theorem. Inverse Probl. 2010, 26, 035011. [CrossRef]
19. Pivovarchik, V. On the Hald-Gesztesy-Simon theorem. Integr. Equ. Oper. Theor. 2012, 73, 383–393.
20. Berkolaiko, G.; Kuchment, P. Introduction to Quantum Graphs; American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 2013

21. Kuchment, P. Quantum graphs. Some basic structures. Waves Random Media 2004, 14, S107–S128.

22. Pivovarchik, V.N. Inverse problem for the Sturm-Liouville equation on a simple graph. SIAM J. Math. Anal. 2000, 32, 801–819.[CrossRef]

23. Yurko, V. Inverse nodal problems for Sturm-Liouville operators on star-type graphs. J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008, 16, 715–722.[CrossRef]

24. Yang, C.-F. Inverse spectral problems for the Sturm-Liouville operator on a d-star graph. J. Math. Anal. Appl. 2010, 365, 742–749.[CrossRef]

25. Yang, C.-F. Inverse problems for the differential operator on a graph with cycles. J. Math. Anal. Appl. 2017, 445, 1548–1562.[CrossRef]

26. Yang, C.-F.;Wang, F. Inverse problems on a graph with loops. J. Inverse Ill-Posed Probl. 2017, 25, 373–380. [CrossRef]

27. Bondarenko, N.P. A partial inverse problem for the Sturm-Liouville operator on a star-shaped graph. Anal. Math. Phys. 2018, 8, 155–168.[CrossRef]

28. Bondarenko, N.P. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on a star-shaped graph with mixed boundary conditions. J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018, 26, 1–12. [CrossRef]

29. Bondarenko, N.P.; Yang, C.-F. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on a star-shaped graph with different edge lengths. Results Math. 2018, 73, 56. [CrossRef]

30. Wang, Y.P.; Shieh, C.-T. Inverse problems for Sturm-Liouville operators on a star-shaped graph with mixed spectral data. Appl. Anal. 2020, 99, 2371–2380. [CrossRef]

31. Yang, C.-F.; Bondarenko, N.P. A partial inverse problem for the Sturm-Liouville operator on the lasso-graph. Inverse Probl. Imaging 2019, 13, 69–79. [CrossRef]

32. Bondarenko, N.P.; Shieh, C.-T. Partial inverse problems for quadratic differential pencils on a graph with a loop. J. Inverse Ill-Posed Probl. 2020, 28, 449–463. [CrossRef]

33. Bondarenko, N.P. An inverse problem for Sturm-Liouville operators on trees with partial information given on the potentials. Math. Meth. Appl. Sci. 2019, 42, 1512–1528. [CrossRef]

34. Bondarenko, N.P. Inverse problem for the differential pencil on an arbitrary graph with partial information given on the coefficients. Anal. Math. Phys. 2019, 9, 1393–1409. [CrossRef]

35. Bondarenko, N.P. A partial inverse Sturm-Liouville problem on an arbitrary graph. Math. Meth. Appl. Sci. 2021, 44, 6896–6910.

36. J. von Below, A characteristic equation associated with an eigenvalue problem on c^2-networks. Linear Algebra Appl.,71, 309–325 (1985).

37. J. Friedman and J.-P. Tillich, Wave equations for graphs and the edge-based Laplacian. Pacific J. Math., 216, No. 2, 229–266 (2004).

38. Kanguzhin B.E., Kaiyrbek Zh.A., Mustafina M.O. Recovering of the Stiffness Coefficients of the Sturm-Liouville Operator on a Star Graph from a Finite

Set of its Eigenvalues // Lobachevckii Journal of Mathematics, 2021. Vol. 15, No. 6, pp. 2725-2730.

39. Bondarenko, N.P. Inverse problem for a differential operator on a star-shaped graph with nonlocal matching condition. *Bol. Soc. Mat. Mex.* 29, 2 (2023). https://doi.org/10.1007/s40590-022-00476-x

40. B. Kanguzhin, L. Zhapsarbaeva, Zh. Madibaiuly, Lagrange formula for differential operators self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree, Eurasian Math. J., 10:1 (2019), pp. 16-29.

41. B. Kanguzhin, Weinstein criteria and regularized traces in the case of transverse vibrations of an elastic string with springs, Differ. Equat. 54, 7–12 (2018).

42. L.K. Zhapsarbayeva, B.E. Kanguzhin, M.N. Konyrkulzhayeva Self-adjoint restrictions of maximal operator on graph. Ufimsk. Mat. Zh. 9 (2017), no. 4., 36-– 44.

43. B. Kanguzhin, Zh. Khuzhakhmetov Application of the Method of Decomposition into Exponential Series by the Spectral Parameter in Eigenvalue Problems. Kazakh Mathematical Journal, 2025, T. 25, №1, Б. 6–15. DOI: 10.70474/kmj-25-1-01.

44. Кангужин Б.Е., Хужахметов Ж.Ж. Применение метода разложения в экспоненциальные ряды по спектральному параметру в задачах на собственные значения. Вестник ОшГУ, Математика. Физика. Техника, 2024, №2(5), С. 68.

45. Sobolev A. V., Solomyak M. Shr¨odinger operators on homogeneous metric trees: spectrum in gaps // Rev. Math. Phys. 2002. Vol. 14. pp. 421-468.

46. Solomyak M. Laplace and Shr¨odinger operators on regular metric trees: the discrete spectrum case // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, The Hans Triebel Anniversary Volume. 2003. pp. 161-181.

47. R. Balakrishnan, K. Ranganathan. A Textbook of Graph Theory. Springer, 2012.

48. Law, C. K., Pivovarchik, V. N. Characteristic functions of quantum graphs. J. Phys. A: Math. Theor., 42: 035302 (11pp) (2009)

49. Kravchenko, V.V., & Porter, R.M. Spectral Parameter Power Series for Sturm-Liouville Problems. Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 33, 459–468, 2010.

50. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.

51. Kanguzhin B.E., Kaiyrbek Zh.A., Mustafina M.O. Determination of Stiffness Coefficients at the Internal Vertices of the Tree Based on a Finite Set of Eigenvalues of an Asymmetric Second-Order Linear Differential Operator// Symmetry. -2025.-V.17, 1263 https://doi.org/10.3390/sym17081263

52. Kanguzhin B.E., Mustafina M.O., Kaiyrbek O.A. Well-posed problems for the Laplace-Beltrami operator on a stratified set consisting of punctured circles and segments // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. -2025.-V.119, №3. -P 150-163 https://doi.org/10.31489/2025M3/150-163

53. G-H. Aimal Rasa, M. Madiyarov, M. Mustafina. On the unique solvability of nonlocal in time problemscontaining the ionkin operator in the spatial variable //

KazNU Bulletin. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. -2025.-V. 128, №4 35-57. https://doi.org/10.26577/JMMCS202512844.

54. G. Berkolaiko, R. Carlson, S. Fulling, and P. Kuchment, Quantum Graphs and their Applications. Am. Math. Soc., USA, 2006.

55. F. Harary, Graph Theory. Addison-Wesley, Boca Raton, 1969.

56. R. Carlson and V. Pivovarchik, Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths, J. Phys. A: Math. Theor. 41 (14), 1–16 (2008).

57. V. Yurko, Inverse Spectral Problems for Linear Differential Operators and Their Applications (CRC, London, 2000).

58. V. Sadovnichii and B. Kanguzhin, On the relation of the differential operators spectrum with the symmetric coefficients and boundary conditions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 267, 310–313 (1982).

59. B. Kanguzhin, Recovering of two-point boundary conditions by finite set of eigenvalues of boundary value problems for higher order differential equations, Ufa Math. J. 12 (3), 22–29 (2020).

60. Kanguzhin, B.; coauthors. Determination of Stiffness Coefficients at the Internal Vertices of the Tree Based on a Finite Set of Eigenvalues of an Asymmetric Second-Order Linear Differential Operator. Symmetry 17(8), 1263 (2025).

61. B. Levitan and I. Sargsyan, Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Equations (AMS, London, 2020).

62. R. Bellman and K. Cooke, Differential-Difference Equations (Academic, New York, 1963).

63. B. Levin, Lectures on Entire Functions (Am. Math. Soc., Providence, RI, 1996).

64. Bondarenko, N. Partial Inverse Sturm-Liouville Problems. Mathematics 2023, 11, 2408

65. Bondarenko, N.; Shieh, C. Partial inverse problems on trees. Proc. R. Soc. Edinburg Sect. Math. 2017, 147A, 917–933.

66. Law, C.; Pivovarchik, V. Characteristic functions on quantum graphs. J. Phys. A Math. Theor. 2009, 3, 5–8.

67. Law, C.; Yanagida, E. A solution to an Ambarzumyan problem on trees. J. Kodai Math. J. 2012, 35, 358–373.

68. Gould, S. Variational Methods for Eigenvalue Problems: An Introduction to the Weinstein Method of Intermediate Problem; University of Toronto Press: Tonawanda, NY, USA, 1966; pp. 55–59.

69. Kanguzhin, B. Recovering of two-point boundary conditions by unite set of eigenvalues of boundary value problems for higher order differential equations. Ufa Math. J. 2020, 12, 9–14.

70. Kuznetsova, M.A. On recovering quadratic pencils with singular coefficients and entire functions in the boundary conditions. Math. Meth. Appl. Sci. 2023, 46.

71. Bondarenko, N.; Chitorkin, E.E. Inverse Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary conditions. Mathematics 2023, 11, 1138.

72. Caroline, E.G.; Luther, D.; Martin, H.; Rodrigo, C.; Hiram, R.; Jarred, J.; Ryan, C. Mobile Phone Auscultation Accurately Diagnoses Chronic Obstructive

Pulmonary Disease Using Nonlinear Respiratory Biofluid Dynamics. Diagnostics 2025, 15, 1550.

73. Woonghee, Y.; Mitsuharu, M. Fault Diagnosis Systems for Robots: Acoustic Sensing-Based Identification of Detached Components for Fault Localization. Appl. Sci. 2025, 15, 6564.

74. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. Докл. АН СССР 88 (1953), №4, 593-596.

75. Weidmann, J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators.Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1258. VIII + 304 p. DOI: 10.1007/BFb0077960. ISBN 978-3-540-17902-3.

76. Nazarov A.I., Stolyarov D.M., Zatitskiy P.B. The Tamarkin equiconvergence theorem and a first-order trace formula for regular differential operators revisited // J. Spectr. Theory 4 (2014), No.2, 365-389.

77. Савчук А.М., Шкаликов А.А. «Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями»// Труды Московского математического общества (2003), №64, 159–212.

78. Юрко В. А. “Восстановление дифференциальных операторов переменных порядков на звездообразном графе по спектрам”, Дифференц. уравнения, 49:12 (2013), 1537–1548; англ. пер.: V. A. Yurko, “Recovering variable order differential operators on star-type graphs from spectra”, Differ. Equ., 49:12 (2013), 1490–1501.

79. Игнатьев М.Ю. “Единственность восстановления дифференциального оператора переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом”, Математика. Механика, 15, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2013, 35–37.

80. Kanguzhin, B.E.; Dairbaeva, G.; Madibaiuly, Z. Identification of boundary conditions of a differential operator. J. Math. Mech. Comput. Sci. 2019, 103, 82–93, doi:10.26577/JMMCS-2019-3-m2.

81. Everitt, W. N., Markus, L.Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-differential Operators.Providence, RI: American Mathematical Society, 1999.Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 61. 187 p. ISBN 0-8218-1080-4 / 978-0-8218-1080-4.

82. Kanguzhin B.E., Akanbay Y.N. Zh. Kaiyrbek. On the Uniqueness of the Recovery of the Domain of the Perturbed Laplace Operator. Lobachevskii Journal of Mathematics. 1532–1535(2022).https://doi.org/10.1134/S1995080222090116.

83. Кангужин Б. Е., Хужахметов Ж. Ж. Применение метода разложения в экспоненциальные ряды по спектральному параметру в задачах на собственные значения. Вестник ОшГУ, Математика. Физика. Техника, 2024, №2(5), стр. 68.

84. Kesel’man G.M., On the unconditional convergence of expansions in terms of eigenfunctions of some differential operators, Izv. Vuz. Math., 82-93. (1964).

85. Ionkin, N.I., Solution of a boundary value problem of heat conduction theory with non-classical boundary condition, Differ. Equ., 13 (1977): 294-304. (in Russian)

86. Ionkin N.I., On the stability of one problem of heat conduction theory with a non-classical boundary condition, Differ. Equ., 15 (1979): 1279-1283. (in Russian)

87. Ilyin, V.A., On another generalization of the Bessel inequality and the Riesz-Fischer theorem for a Fourier series in a uniformly bounded orthonormal system, Trans. of the Steklov Math. Inst., 219 (1997): 211-219.

88. Kozhanov, A.I., Koshanov, B.D., Sultangazieva, Zh.B., New Boundary Value Problems for the Fourth-Order QuasiHyperbolic Type, Sib. Elec. Math. Rep., 16 (2019): 1410-1436. https:doi.org/10.33048/semi.2019.16.098

89. Kozhanov A.I., Pinigina, N.R., Boundary Value Problems for High-Order Nonclassical Differential Quantities, Math. Notes., 101 (2017): 403-412. https:doi.org/10.4213/mzm11172

90. Ashurov R.R., Mukhiddinova, A.T., Initial boundary value problems for hyperbolic equations with an elliptic operator of arbitrary order, Bulletin of KRAUNC, Phys. and Math. Scien., 30 (2020): 8-19. https:doi.org/10.26117/2079-6641-2020- 30-1-8-19

91. Romanko, V.K., Boundary value problems for one class of differential operators, Differ. Equ., 10 (1974): 117-131.

92. Orynbasarov, M., On the solvability of boundary value problems for parabolic and polyparabolic equations in a noncylindrical region with non-smooth lateral boundaries, Differ. Equ., 30 (1994): 151-161. https://doi.org/10.1137/0108027

93. Kanguzhin B.E.; Koshanov B.D., Necessary and sufficient conditions for the solvability of boundary value problems for the polyharmonic equation, Ufa Math. J., 2 (2010): 41-52.

94. Tikhonov I.V., Uniqueness theorems in linear nonlocal problems for abstract differential equations, Izv. Math., 67 (2003): 133-166. https:doi.org/10.4213/im429

95. Popov A.Y., Tikhonov I.V., Uniqueness classes in a time-nonlocal problem for the heat equation and the complex eigenfunctions of the Laplace operator, Differ. Equ., 40 (2004): 396-405.

96. Kanguzhin B.E., Koshanov B.D., The Uniqueness Criterion for a Solution to a Boundary Value Problem for the Operator ∂ 2p ∂t2p − A with an Elliptic Operator A of Arbitrary Order, Sib. Math. J., 63 (2022): 1083-1090. https://doi.org/10.1134/S0037446622060088

97. Kanguzhin B.E., Koshanov B.D., Uniqueness Criteria for Solving a Time Nonlocal Problem for a High-Order Differential Operator Equation l(·) − A with a

Wave Operator with Displacement, Symmetry, 14:6 (2022). https://doi.org/10.3390/sym14061239

98. Kanguzhin B.E., Koshanov B.D., Criteria for the uniqueness of a solution to a time-nonlocal problem for an operator-differential equation l(·) − A with the Tricomi operator A, Differ. Equ., 59 (2023): 4-14. https://doi.org/10.1134/S0012266123010019

99. Kanguzhin B., Kaiyrbek Z., Uaissov B. In one scenario, the development of a defect in the attachment of the rod . Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, (2024), 121(1), 46-51. https://doi.org/10.26577/JMMCS202412115

100. Kanguzhin, B. E., Auzerkhan G., Tastanov M.G. The method of variation of arbitrary constants in the case of a system of linear differential equations of different orders. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, (2021), 111(3), 16-27. https://doi.org/10.26577/JMMCS.2021.v111.i3.02

101. Kanguzhin, B., Akanbay E., Madibayuly, Z. Jointing of thin elastic rods and generalized Kirchhoff conditions at nodes. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, (2020), 106(2), 58-68. https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v106.i2.06

102. Kanguzhin B., Dosmagulova K., Akanbay Y. On the laplace-beltrami operator in stratified sets composed of punctured circles and segments. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, (2025), 125(1). https://doi.org/10.26577/JMMCS2025125103

103. Ақанбай Н Қазақша-орысша орысша-қазақша терминологиялық сөздік. Математика. Серия 2. (Около 9000 терминов). Словарь Одобрен Республиканской терминологической Комиссией при Правительстве Республики Казахстан Издательская корпорация "Казакпарат" 2014 - г. ISBN 978-601-03-0303-4 440 - стр. ҚАЗАҚСТАН

104. Pokornyi Yu V, Penkin O M, Pryadiev V I, Borovskikh A V, Lazarev K P and Shabrov S A 2004 *Differential Equations on Geometric Graphs* (Moscow: Fizmatgiz) (in Russian)

105. Pokornyi Yu V and Pryadiev V L 2004 The qualitive Sturm-liouvile theory on spatial networks J.Math. Sci 119 788-835

106. Borg, G. Eine Umkehrung der Storm-Liouvillshen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigen- werte. Acta Math. 1945, 78, 1–96.

107. Levitan, B.M.; Gasymov, M.G. Determination of a differential equation by two of its spectra..Russ. Math. Surv.1964, 19, 1–63.

108. Plaksina, O.A. Inverse problems of spectral analysis for the Storm-Liouville operators with nonseparated boundary conditions. Acta Math. 1988, 59, 1–23.

109. Yurko, V. Inverse problems for differential pencils on A-graphs. J. Inverse Ill-Posed Probl. 2017, 25, 819–828.

110. Kanguzhin, B.E.; Dairbaeva, G.; Madibaiuly, Z. Uniqueness of the restoration of boundary conditions differential operator on a set of spectra. J. Math. Mech. Comput. Sci. 2019, 103, 82–93

111. Liu, D.-Q.; Yang, C.-F. Inverse spectral problems for Dirac operators on a star graph with mixed boundary conditions. Math. Methods Appl. Sci. 2021.

112. Sadovnichii, V.; Sultanaev, Y.T.; Akhtyamov, A. The inverse problem of recovering the coefficients of a differential equations on a graph. J. Inverse Ill-Posed Probl. 2020, 28, 727–738.

113. Zhapsarbaeva, L.K.; Kanguzhin, B.E.; Seitova, A.A. Asymptotics of the eigenvaluesof the double differentiation operator with Birkhoff-regular boundary conditions on a star graph. *Mat. Zhurnal* **2018**, *18*, 107–124.

114. Ao, S.I.; Gelman, L. Electrical Engineering and Applied Computing; Springer ; Science+Business Media: Нью-Йорк, АҚШ, 2011.

115. Balakrishnan, R.; Ranganathan, K. Textbook of Graph Theory; Springer Science+Business Media: Нью-Йорк, АҚШ, 2012.

116. Sobolev, A.V.; Solomyak, M. Schrodinger operators on homogeneous metric trees:spectrum in gaps. Rev. Math. Phys. 2002, 14, 421–468.

117. Nurakhmetov, D.; Jumabayev, S.; Aniyarov, A.; Kussainov, R. Symmetric Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions of Uniform Beams. Symmetry 2020, 12, 2097.

118. Pham, F. (1970). Introduction to the topological study of Landau singularities. Moscow: Mir.

119. Pokorny, Yu.V., Penkin, O.M., Borovskikh, A.V., Pryadiev, V.L., Lazarev, K.P., Shabrov, S.A. (2005). Differential equations on geometric graphs. Moscow: Fizmatlit.

120. Dairbekov, N.S., Penkin, O.M., & Sarybekova, L.O. (2019). An analog of the Sobolev inequality on a stratified set. St. Petersburg Math. J., 30, 869-875. https://doi.org/10.1090/spmj/1573

121. Biyarov, B.N. (2011). About the spectrum of the Laplace operator. Eurasian Math. J., 2 (2), 129–133.

122. Kokebaev, B.K., Otelbaev, M., Shynybekov, A.N. (1982). On the theory of restriction and extension of operators.

123. Kokebaev, B.K., Otelbaev, M., Shynybekov, A.N. (1983). On questions of extension and restriction of operators. Reports of the Academy of Sciences of the USSR, 271 (6), 1307–1311.

124. Kokebaev, B.K., Otelbaev, M., Shynybekov, A.N. (1983). On the theory of restriction and extension of operators.

125. Kanguzhin, B.E., Aimal Rasa, G.H., Kaiyrbek, Zh.A. (2021). Identification of the Domain of the Sturm-Liouville Operator on a Star Graph. Symmetry, 13 (7), 1210. https://doi.org/10.3390/ sym13071210

126. Pavlov, B.S. (1987). The theory of extensions and explicitly-soluble models. Russian Math. Surveys, 42 (6), 127–168. https://doi.org/10.1070/RM1987v042n06ABEH001491

127. Abramowitz, M., Stegun, C. (2016). Legendre Functions and Orthogonal Polynomials. 9th printing. New York.

128. Wang, Y., Ye, L. (2013). Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector. Complex Variables and Elliptic Equations, 58 (1), 7–22. https://doi.org/10.1080/17476933. 2010.551199

129. Begehr, H., Vaitekhovich, T. (2013). Modified harmonic Robin function. Complex Variables and Elliptic Equations, 58 (4), 483–496. https://doi.org/10.1080/17476933.2011.625092

130. Biyarov, B.N., Svistunov, D.L., Abdrasheva, G.K. (2020). Correct singular perturbations of the Laplace operator. Eurasian Math. J., 11 (4), 25–34. https://doi.org/10.32523/2077-9879- 2020-11-4-25-34

131. Biyarov, B.N., Abdrasheva, G.K. (2017). Relatively bounded perturbations of correct restrictions and extensions of linear operators. Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, 216, 213–221.

132. Konechnaja, N.N., Mirzoev, K.A., Shkalikov, A.A. (2018). On the Asymptotic Behavior of Solutions to Two-Term Differential Equations with Singular Coefficients. Mathematical Notes, 104 (1-2), 244–252. http://dx.doi.org/10.1134/S0001434618070258

133. Savchuk, A.M., Shkalikov, A.A. (2020). Asymptotic analysis of solutions of ordinary differential equations with distribution coefficients. Sbornik: Mathematics, 211 (11), 1623–1659. https://doi.org/ 10.1070/SM9340

134. Miloslova, A.A., Suslina, T.A. (2021). Averaging of high-order parabolic equations with periodic coefficients. https://doi.org/10.22363/2413-3639-2021- 67-1-130-191

135. Nazarov, S.A. (2021). On eigenvalues and functions of Dirichlet and Neumann problems in a domain with perforated partitions. Differential equations, 57 (6), 752–768.

136. Biyarov, B.N. (2025). Similar transformation of one class of well-defined restrictions. Eurasian Math. J., 16 (1), 8–21. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2025-16-1-08-21.